

Correction du TD d'Intégration Numérique

Exercice 1 : Méthode du point milieu (et rectangles)

1) Soit $f \in C^2([0, 1])$. On effectue un développement de Taylor de $f(t)$ au voisinage de $1/2$:

$$f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) + \left(t - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 f''(\xi_t)$$

En intégrant entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right) dt + f'\left(\frac{1}{2}\right) \underbrace{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt}_{=0} + \int_0^1 \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 f''(\xi_t) dt$$

D'après le théorème de la moyenne (car $(t - 1/2)^2 \geq 0$), il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que :

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 f''(\xi_t) dt = \frac{f''(t_0)}{2} \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{(t - 1/2)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{(1/2)^3}{3} - \frac{(-1/2)^3}{3} = \frac{1/8 - (-1/8)}{3} = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$$

D'où le terme d'erreur : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{12} f''(t_0) = \frac{1}{24} f''(t_0)$. La constante est donc $\mathbf{C} = \frac{1}{24}$.

2) Soit $g \in C^2([a, b])$. On pose le changement de variable $x = a + (b - a)t$, d'où $dx = (b - a)dt$. Soit $\phi(t) = g(a + (b - a)t)$. On a $\phi(1/2) = g\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$. D'après la question 1 appliquée à ϕ sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \phi(t) dt = \phi(1/2) + \frac{1}{24} \phi''(t_0)$$

Or $\int_a^b g(x) dx = (b - a) \int_0^1 \phi(t) dt$. De plus, $\phi'(t) = (b - a)g'(x)$ et $\phi''(t) = (b - a)^2 g''(x)$ avec $x \in [a, b]$. Donc :

$$\int_a^b g(x) dx = (b - a) \left[g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b - a)^2 g''(x_0) \right]$$

$$\boxed{\int_a^b g(x) dx = (b - a) g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b - a)^3}{24} g''(x_0)}$$

3) Méthode composite : on subdivise $[a, b]$ en N sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ de longueur $h = \frac{b-a}{N}$.

$$I(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

Sur chaque intervalle, on applique le résultat de la question 2 :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = hf(m_i) + \frac{h^3}{24} f''(c_i) \quad \text{où } m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

En sommant :

$$I(f) = h \underbrace{\sum_{i=1}^N f(m_i)}_{J_N(f)} + \sum_{i=1}^N \frac{h^3}{24} f''(c_i)$$

Comme $h = \frac{b-a}{N}$, le terme d'erreur est :

$$E = \frac{(b-a)^3}{24N^3} \sum_{i=1}^N f''(c_i) = \frac{(b-a)^3}{24N^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f''(c_i) \right)$$

4) La fonction f'' étant continue, la moyenne $\frac{1}{N} \sum f''(c_i)$ est une valeur atteinte par f'' en un point $c \in [a, b]$ (théorème des valeurs intermédiaires). Donc :

$$\int_a^b f(x) dx = J_N(f) + \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(c)$$

5) Avec $f(x) = e^x$ sur $[0, 2]$. $f''(x) = e^x$. On veut $|E| \leq 10^{-6}$. Le terme majorant de l'erreur est basé sur $\max_{[0,2]} |f''(x)| = e^2$.

$$\left| \frac{(2-0)^3}{24N^2} f''(c) \right| \leq \frac{8}{24N^2} e^2 = \frac{e^2}{3N^2}$$

On cherche N tel que $\frac{e^2}{3N^2} \leq 10^{-6}$, soit $N^2 \geq \frac{e^2}{3} 10^6$.

$$N \geq \sqrt{\frac{e^2}{3}} 10^3 = \frac{e}{\sqrt{3}} 1000 \approx \frac{2.718}{1.732} 1000 \approx 1569.2$$

Il faut donc choisir $N \geq 1570$.

6) Sur $[0, 2]$, la fonction $f(x) = \ln(x)$ n'est pas définie en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = -\infty$. La dérivée seconde n'est pas bornée sur l'intervalle d'intégration. Par conséquent, la majoration de l'erreur en $O(1/N^2)$ (qui dépend de $\|f''\|_\infty$) ne s'applique plus. La convergence sera détériorée (plus lente qu'en N^{-2}) au voisinage de la singularité en 0.

Exercice 2

1. **Détermination des coefficients** La formule est $\int_{-1}^1 f(t) dt \simeq \alpha f(-1) + \beta f(\gamma)$. Pour qu'elle soit exacte pour les polynômes de degré ≤ 2 , il faut qu'elle soit exacte pour la base canonique $\{1, t, t^2\}$.

- Pour $f(t) = 1$: $\int_{-1}^1 dt = 2$. La formule donne $\alpha(1) + \beta(1) = \alpha + \beta$.

$$\implies \alpha + \beta = 2 \quad (1)$$

- Pour $f(t) = t : \int_{-1}^1 t dt = 0$. La formule donne $\alpha(-1) + \beta(\gamma) = -\alpha + \beta\gamma$.

$$\implies -\alpha + \beta\gamma = 0 \quad (2)$$

- Pour $f(t) = t^2 : \int_{-1}^1 t^2 dt = [\frac{t^3}{3}]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$. La formule donne $\alpha(-1)^2 + \beta(\gamma)^2 = \alpha + \beta\gamma^2$.

$$\implies \alpha + \beta\gamma^2 = \frac{2}{3} \quad (3)$$

De (2), on tire $\alpha = \beta\gamma$. En remplaçant dans (1) : $\beta\gamma + \beta = 2 \implies \beta(1 + \gamma) = 2$. En remplaçant dans (3) : $\beta\gamma + \beta\gamma^2 = \frac{2}{3} \implies \beta\gamma(1 + \gamma) = \frac{2}{3}$. On divise l'équation issue de (3) par celle issue de (1) (si $\beta(1 + \gamma) \neq 0$) :

$$\frac{\beta\gamma(1 + \gamma)}{\beta(1 + \gamma)} = \frac{2/3}{2} \implies \gamma = \frac{1}{3}$$

On reporte $\gamma = 1/3$ dans $\beta(1 + \gamma) = 2$:

$$\beta \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 2 \implies \beta \frac{4}{3} = 2 \implies \beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Enfin $\alpha = \beta\gamma = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Les paramètres sont donc : $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{3}}$.

2. Constante d'erreur L'erreur est $E(f) = \int_{-1}^1 f(t)dt - (\frac{1}{2}f(-1) + \frac{3}{2}f(1/3))$. Pour $f(t) = t^3$, on a $\int_{-1}^1 t^3 dt = 0$. La formule donne : $\frac{1}{2}(-1)^3 + \frac{3}{2}(\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1}{27} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{-9+1}{18} = -\frac{8}{18} = -\frac{4}{9}$. L'erreur est donc $E(t^3) = 0 - (-4/9) = \frac{4}{9}$. On nous donne $E(f) = Cf^{(3)}(\xi)$. Pour $f(t) = t^3$, $f^{(3)}(t) = 6$. Donc $\frac{4}{9} = C \times 6 \implies C = \frac{4}{54} = \boxed{\frac{2}{27}}$.

3. Extension à l'intervalle $[a, b]$ Soit $g \in C^3([a, b])$. Changement de variable affine $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$. Alors $dx = \frac{b-a}{2}dt$. L'erreur sur $[a, b]$ s'obtient par changement de variable sur l'erreur de référence :

$$E_{[a,b]}(g) = \frac{b-a}{2} E_{[-1,1]}(f)$$

où $f(t) = g(x(t))$. On a $f^{(3)}(t) = (\frac{b-a}{2})^3 g^{(3)}(x)$. Donc :

$$E_{[a,b]}(g) = \frac{b-a}{2} \times C \times f^{(3)}(\xi) = \frac{b-a}{2} \times \frac{2}{27} \times \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 g^{(3)}(\zeta)$$

$$E_{[a,b]}(g) = \frac{2}{27} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 g^{(3)}(\zeta) = \frac{2}{27} \frac{(b-a)^4}{16} g^{(3)}(\zeta) = \frac{(b-a)^4}{216} g^{(3)}(\zeta)$$

La constante demandée telle que erreur = $K(b-a)^4 g^{(3)}(\zeta)$ est donc $\boxed{K = \frac{1}{216}}$. La quadrature sur $[a, b]$ correspondante est :

$$\int_a^b g(x)dx \simeq \frac{b-a}{2} \left[\frac{1}{2}g(a) + \frac{3}{2}g\left(a + \frac{b-a}{2}(1 + 1/3)\right) \right] \quad (\text{attention aux bornes})$$

Vérifions le point $\gamma \in [-1, 1]$ ramené à $[a, b]$: $x_\gamma = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}(\frac{1}{3}) = \frac{3a+3b+b-a}{6} = \frac{2a+4b}{6} = \frac{a+2b}{3}$. D'où la formule : $\frac{b-a}{4} [g(a) + 3g(\frac{a+2b}{3})]$.

4. Nombre de sous-intervalles Pour calculer $\int_0^1 e^x dx$, on utilise la méthode composite. Erreur totale $E_{global} = \sum_{i=1}^N E_{[x_{i-1}, x_i]}(f)$. Sur un intervalle de longueur $h = 1/N$, l'erreur locale est $\frac{1}{216}h^4 f^{(3)}(\xi_i)$. L'erreur globale est majorée par :

$$|E| \leq N \times \frac{1}{216} h^4 \max |f^{(3)}| = \frac{1}{h} \frac{1}{216} h^4 e^1 = \frac{e}{216} h^3$$

On veut $\frac{e}{216N^3} \leq 10^{-6}$.

$$N^3 \geq \frac{e}{216} 10^6 \implies N \geq \frac{100}{6} \sqrt[3]{e} \approx 16.66 \times 1.39 \approx 23.2$$

Il faut prendre $\boxed{N = 24}$ sous-intervalles.

Exercice 3

1) Exactitude degré 1 Formule $I(f) \simeq \alpha f(0) + \beta f'(\gamma)$.

- $f(t) = 1, f'(t) = 0. 1 = \alpha$.
- $f(t) = t, f'(t) = 1. \int_0^1 t dt = 1/2$. Formule : $\alpha(0) + \beta(1) = \beta$.

Donc $\boxed{\alpha = 1, \beta = 1/2}$. La formule est $\simeq f(0) + \frac{1}{2}f'(\gamma)$.

2) Exactitude degré 2 $f(t) = t^2, f'(t) = 2t. \int_0^1 t^2 dt = 1/3$. Formule : $1(0)^2 + \frac{1}{2}(2\gamma) = \gamma$.
Donc $\boxed{\gamma = 1/3}$.

3) Changement d'intervalle Pour $\int_a^b g(x) dx$. On pose $t = \frac{x-a}{b-a}$ donc $x = a + (b-a)t$, $dx = (b-a)dt$. Soit $f(t) = g(x(t))$. $\int_a^b g(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(t) dt \simeq (b-a)[f(0) + \frac{1}{2}f'(1/3)]$. On a $f(0) = g(a)$ et $f'(t) = (b-a)g'(x)$. Donc $f'(1/3) = (b-a)g'(a + \frac{b-a}{3})$. D'où la formule :

$$\int_a^b g(x) dx \simeq (b-a)g(a) + \frac{(b-a)^2}{2} g' \left(\frac{2a+b}{3} \right)$$

4) Méthode composite Subdivision régulière $x_i = A + ih$ avec $h = \frac{B-A}{N}$.

$$\int_A^B g(t) dt \simeq \sum_{i=0}^{N-1} \left[hg(x_i) + \frac{h^2}{2} g' \left(x_i + \frac{h}{3} \right) \right]$$

Exercice 4

1. Détermination des coefficients et de l'ordre Nous cherchons une formule de quadrature de la forme :

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx a_1 g(-2) + a_2 g(-1) + a_3 g(0)$$

Notez que l'intervalle d'intégration est $[-1, 1]$, mais les points d'évaluation sont $\{-2, -1, 0\}$. Il s'agit donc d'une formule d'**extrapolation**. Pour déterminer les poids a_1, a_2, a_3 , nous imposons que la formule soit exacte pour les polynômes $1, t, t^2$.

- Pour $g(t) = 1$:

$$\int_{-1}^1 1 dt = 2 \implies a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad (E_1)$$

- Pour $g(t) = t$:

$$\int_{-1}^1 t dt = 0 \implies -2a_1 - a_2 = 0 \quad (E_2)$$

- Pour $g(t) = t^2$:

$$\int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3} \implies 4a_1 + a_2 = \frac{2}{3} \quad (E_3)$$

Résolution du système : De (E_2) on a $a_2 = -2a_1$. En injectant dans (E_3) : $4a_1 - 2a_1 = \frac{2}{3} \implies 2a_1 = \frac{2}{3} \implies a_1 = \frac{1}{3}$. Alors $a_2 = -2/3$. Et avec (E_1) : $a_3 = 2 - a_1 - a_2 = 2 - 1/3 + 2/3 = 7/3$.
Donc $a_1 = 1/3, a_2 = -2/3, a_3 = 7/3$.

Vérification degré n : Pour $g(t) = t^3$, $\int_{-1}^1 t^3 dt = 0$. Formule : $\frac{1}{3}(-8) - \frac{2}{3}(-1) + 0 = -2 \neq 0$.
Donc le degré de précision est $n = 2$.

2. Constante K L'erreur est $R(g) = \int_{-1}^1 g - Q(g)$. Pour $g(t) = t^3$, $R(t^3) = 0 - (-2) = 2$.
L'hypothèse est $R(g) = Kg^{(3)}(\xi)$. Pour t^3 , la dérivée 3ème est 6. Donc $2 = K \times 6 \implies K = \frac{1}{3}$.

3. Formule générale et erreur On considère des points espacés de h , soit x_n, x_{n+1}, x_{n+2} , et on veut intégrer sur $[x_{n+1}, x_{n+3}]$. La longueur de l'intervalle d'intégration est $2h$. Les points relatifs sont : x_{n+1} (borne inf, correspond à $t = -1$), x_{n+2} (milieu, correspond à $t = 0$), x_{n+3} (borne sup, correspond à $t = 1$). Les points utilisés par la formule sont x_n, x_{n+1}, x_{n+2} . En posant $x = x_{n+2} + ht$, pour $t \in [-1, 1]$, x décrit $[x_{n+1}, x_{n+3}]$. Les valeurs utilisées sont : $t = 0 \rightarrow x_{n+2}$, $t = -1 \rightarrow x_{n+1}$, $t = -2 \rightarrow x_n$. Cela correspond exactement à la configuration de référence (points 0, -1, -2). La formule est donc :

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+3}} f(x) dx = h \int_{-1}^1 f(x_{n+2} + ht) dt \approx h \left[\frac{7}{3} f(x_{n+2}) - \frac{2}{3} f(x_{n+1}) + \frac{1}{3} f(x_n) \right]$$

(Note : les coefficients sont appliqués aux points correspondants : a_3 en 0, a_2 en -1, a_1 en -2).

Erreur de quadrature : On a $E = hR(g)$ où $g(t) = f(x_{n+2} + ht)$. On sait que $R(g) = \frac{1}{3}g^{(3)}(\xi)$ avec $\xi \in]-2, 1[$. Or $g^{(3)}(t) = h^3 f^{(3)}(x_{n+2} + ht)$. Donc :

$$E = h \times \frac{1}{3} \times h^3 f^{(3)}(\tau) = \frac{h^4}{3} f^{(3)}(\tau)$$

où $\tau \in]x_n, x_{n+3}[$.

Théorème : Erreur de la quadrature de Gauss sur $[0, 1]$

Théorème : Soit $Q_n(g) = \sum_{i=1}^n w_i g(x_i)$ la formule de quadrature de Gauss à n points sur l'intervalle $[0, 1]$. Si $g \in C^{2n}([0, 1])$, alors l'erreur de quadrature est donnée par :

$$E_{[0,1]}(g) = \int_0^1 g(t) dt - Q_n(g) = \frac{1}{(2n)!} g^{(2n)}(\xi) \int_0^1 [M_n(t)]^2 dt$$

où $\xi \in]0, 1[$ et $M_n(t) = \prod_{i=1}^n (t - x_i)$ est le polynôme nodal unitaire (qui correspond au n -ième polynôme orthogonal sur $[0, 1]$).

Rappel : Interpolation d'Hermite

Pour démontrer ce théorème via l'approche classique, rappelons le principe de l'interpolation d'Hermite. Contrairement à Lagrange qui fixe uniquement les valeurs, l'interpolation d'Hermite cherche un polynôme H_{2n-1} de degré $\leq 2n-1$ qui coïncide avec la fonction g et sa dérivée g' aux nœuds x_i :

$$H_{2n-1}(x_i) = g(x_i) \quad \text{et} \quad H'_{2n-1}(x_i) = g'(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Erreur d'interpolation d'Hermite : L'erreur commise par ce polynôme est donnée par la formule suivante :

$$g(t) - H_{2n-1}(t) = \frac{g^{(2n)}(\xi_t)}{(2n)!} \prod_{i=1}^n (t - x_i)^2 = \frac{g^{(2n)}(\xi_t)}{(2n)!} [M_n(t)]^2$$

où $\xi_t \in]0, 1[$. Remarquons que le terme $[M_n(t)]^2$ est toujours positif ou nul, ce qui sera crucial pour la suite.

Preuve (via le polynôme d'Hermite)

1. Intégration de l'erreur d'interpolation Considérons le polynôme d'Hermite H_{2n-1} défini ci-dessus. Intégrons la formule de l'erreur sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 H_{2n-1}(t) dt = \int_0^1 \frac{g^{(2n)}(\xi_t)}{(2n)!} [M_n(t)]^2 dt$$

2. Lien avec la quadrature Examinons le terme $\int_0^1 H_{2n-1}(t) dt$. La quadrature de Gauss à n points est construite pour être exacte pour tous les polynômes de degré $\leq 2n-1$. Comme H_{2n-1} est précisément de degré $\leq 2n-1$, l'intégrale est égale à la somme discrète :

$$\int_0^1 H_{2n-1}(t) dt = Q_n(H_{2n-1}) = \sum_{i=1}^n w_i H_{2n-1}(x_i)$$

Or, par la condition d'interpolation, $H_{2n-1}(x_i) = g(x_i)$. On a donc :

$$\int_0^1 H_{2n-1}(t) dt = \sum_{i=1}^n w_i g(x_i) = Q_n(g)$$

L'équation de l'étape 1 devient donc exactement l'erreur de quadrature :

$$E_{[0,1]}(g) = \int_0^1 \frac{g^{(2n)}(\xi_t)}{(2n)!} [M_n(t)]^2 dt$$

3. Théorème de la moyenne et conclusion Dans l'intégrale de droite, la fonction $t \mapsto [M_n(t)]^2$ est continue et ne change pas de signe (elle est positive) sur $[0, 1]$. Nous pouvons donc appliquer le **théorème de la moyenne généralisée**. Il existe un réel $\xi \in]0, 1[$ tel que :

$$\int_0^1 \frac{g^{(2n)}(\xi_t)}{(2n)!} [M_n(t)]^2 dt = \frac{g^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_0^1 [M_n(t)]^2 dt$$

Ce qui conclut la preuve.

Exercice 6 : Énoncé corrigé

Soit $f \in C^5([a, b])$. On note $c = \frac{a+b}{2}$ et $h = \frac{b-a}{2}$.

(i) Montrer qu'il existe un unique polynôme p de degré ≤ 3 tel que :

$$p(a) = f(a), \quad p(b) = f(b), \quad p(c) = f(c), \quad p'(c) = f'(c)$$

(ii) Soit $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{P}_3$ l'application qui associe les valeurs au polynôme. Pourquoi l'unicité implique-t-elle l'existence ?

(iii) Montrer qu'il existe $\eta \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}(x-a)(x-b)(x-c)^2$$

(iv) Calculer $\int_a^b p(x)dx$. Quel est le degré de précision de cette quadrature ?

(v) En déduire l'erreur de la méthode de Simpson :

$$E = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)] = \frac{-h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

Solution détaillée

(i) Unicité

Soient $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_3$ deux solutions. Posons $\delta = p_1 - p_2$. Alors $\delta \in \mathbb{P}_3$ et vérifie :

$$\delta(a) = 0, \quad \delta(b) = 0, \quad \delta(c) = 0, \quad \delta'(c) = 0$$

Le polynôme δ admet des racines en a, b et une racine double en c . Il possède donc au moins 4 racines (comptées avec multiplicité). Or, un polynôme de degré ≤ 3 non nul ne peut avoir plus de 3 racines. Donc $\delta = 0$, soit $p_1 = p_2$.

(ii) Existence

L'application $L : p \mapsto (p(a), p(b), p(c), p'(c))$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension 4 ($\mathbb{P}_3$ et $\mathbb{R}^4$). D'après (i), $\text{Ker}(L) = \{0\}$ (injectivité). D'après le théorème du rang, une application linéaire injective entre espaces de même dimension est bijective. L'existence est donc garantie.

(iii) Erreur d'interpolation

Soit $x \in [a, b]$ fixé. Posons $\Omega(t) = (t-a)(t-b)(t-c)^2$ et la fonction auxiliaire :

$$W(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Omega(x)}\Omega(t)$$

W s'annule en a, b, c, x . De plus $W'(c) = 0$ (car f, p ont même dérivée en c et $\Omega'(c) = 0$ via la racine double). En appliquant le théorème de Rolle de manière répétée (comptant les multiplicités), la dérivée 4-ème $W^{(4)}$ s'annule en un point η . Comme $p^{(4)} = 0$ et $\Omega^{(4)} = 4! = 24$, on obtient :

$$0 = f^{(4)}(\eta) - 24 \frac{f(x) - p(x)}{\Omega(x)} \implies f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\Omega(x)$$

(iv) Formule de Simpson

La méthode de Simpson est une formule de quadrature exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Or, par construction, le polynôme interpolateur $p(x)$ appartient à $\mathbb{P}_3$. L'intégrale de $p(x)$ est donc exactement donnée par l'application de la formule de Simpson à p :

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{b-a}{6}[p(a) + 4p(c) + p(b)]$$

En utilisant les conditions d'interpolation $p(a) = f(a)$, $p(b) = f(b)$ et $p(c) = f(c)$, on retrouve immédiatement :

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

On constate que le résultat ne dépend pas de $f'(c)$.

(v) Erreur de Quadrature

En intégrant l'erreur d'interpolation :

$$E = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\eta_x)}{24}(x-a)(x-b)(x-c)^2 dx$$

Le terme $(x-a)(x-b)(x-c)^2$ est négatif ou nul sur tout l'intervalle $[a, b]$. On applique le théorème de la moyenne généralisée :

$$E = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)^2 dx$$

Calcul de l'intégrale (changement de variable $t = x - c$) :

$$\int_{-h}^h (t+h)(t-h)t^2 dt = \int_{-h}^h (t^4 - h^2 t^2) dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{h^2 t^3}{3} \right]_{-h}^h = -\frac{4h^5}{15}$$

D'où le résultat final :

$$E = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \left(-\frac{4h^5}{15} \right) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Exercice 7

Point milieu comme formule de Gauss sur $[0, 1]$ On cherche une formule de quadrature à 1 point exacte à l'ordre maximal sur l'intervalle de référence $[0, 1]$.

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \omega_1 g(x_1)$$

Pour être une formule de Gauss à 1 point ($n = 1$), le point x_1 doit être la racine du polynôme orthogonal de degré 1 sur $[0, 1]$ pour le poids $w(t) = 1$.

Soit $P_1(t) = t - \alpha$. On veut $\langle P_1, P_0 \rangle = 0$ avec $P_0(t) = 1$.

$$\int_0^1 (t - \alpha) \cdot 1 dt = \left[\frac{t^2}{2} - \alpha t \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \alpha = 0 \implies \alpha = \frac{1}{2}$$

Le polynôme orthogonal est $P_1(t) = t - 1/2$. Sa racine est $\boxed{x_1 = 1/2}$.

Le poids associé est $\omega_1 = \int_0^1 L_1(t)dt$ où $L_1(t) = 1$.

$$\omega_1 = \int_0^1 1 dt = 1$$

La formule sur $[0, 1]$ est donc : $\int_0^1 g(t)dt \approx 1 \cdot g(1/2)$.

Passage à un intervalle $[a, b]$ quelconque Soit f définie sur $[a, b]$. On pose $x = a + (b - a)t$. Si $t = 1/2$, alors $x = (a + b)/2$.

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \int_0^1 f(a + (b - a)t)dt \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

C'est exactement la **formule du point milieu**.

Majoration de l'erreur Une formule de Gauss à n points est exacte pour les polynômes de degré $2n - 1$. Ici $n = 1$, donc la précision est $2(1) - 1 = 1$. L'erreur dépend donc de f'' . Sur l'intervalle de référence $[0, 1]$, l'erreur est :

$$E_{[0,1]}(g) = \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} g(\xi) \int_0^1 [M_n(t)]^2 dt$$

où $M_n(t) = (t - 1/2)$ est le polynôme nodal unitaire.

$$E_{[0,1]}(g) = \frac{g''(\xi)}{2} \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{g''(\xi)}{2} \left[\frac{(t - 1/2)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{g''(\xi)}{2} \frac{1}{12} = \frac{1}{24} g''(\xi)$$

Passage à l'intervalle $[a, b]$: $g(t) = f(x(t)) \implies g''(t) = (b - a)^2 f''(x)$. L'erreur sur l'intégrale est multipliée par $(b - a)$ (provenant du dx) :

$$E_{[a,b]}(f) = (b - a) \frac{1}{24} (b - a)^2 f''(\zeta) = \boxed{\frac{(b - a)^3}{24} f''(\zeta)}$$