

Calcul scientifique
TD/TP N°3 : Intégration numérique

1 Méthode de quadrature d'ordre $p = 0$

1. Implémenter les méthodes des rectangles à droite, à gauche et celle du point milieu.
2. Calculer une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{x} \exp(x^2) dx$, pour $n = 10, 100, 1000$.
3. Représenter graphiquement l'évolution de cette approximation en fonction de n , pour les 3 méthodes.
4. Définir une fonction python `f0` implémentant la fonction constante $f_0(x) = 4$, ainsi qu'une fonction `F0` implémentant sa primitive F_0 telle que $F_0(0) = 0$. Faire de même avec $f(x) = x^2$.
5. Implémenter une fonction renvoyant l'erreur de quadrature $|I_{\text{ex}} - I_n|$ des 3 méthodes en fonction d'un nombre de points n donné.
6. Implémenter une fonction `plotError` permettant de tracer l'erreur de quadrature des 3 méthodes en fonction de n , pour une fonction f donnée.
7. Tracer cette erreur pour les fonctions f_0 et f . Commenter.

2 Méthode de quadrature d'ordre $p = 1$

1. Implémenter la méthode des trapèzes.
2. Calculer une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{x} \exp(x^2) dx$ pour $n = 10, 100, 1000$.
3. Définir une fonction python `f1` implémentant la fonction linéaire $f_1(x) = 3x + 2$, ainsi qu'une fonction `F1` implémentant sa primitive F_1 telle que $F_1(0) = 0$. Faire de même avec $f(x) = \cos(x)$.
4. Implémenter une fonction python pour tracer l'erreur de quadrature de la méthode des trapèzes en fonction de n , pour une fonction f donnée.
5. Tracer cette erreur pour les fonctions f_1 et f . Commenter.

3 Méthode de quadrature d'ordre $p = 2$

1. Implémenter la méthode de Simpson.
2. Calculer une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{x} \exp(x^2) dx$ pour $n = 10, 100, 1000$.
3. Définir une fonction python `f2` implémentant la fonction quadratique $f_2(x) = x^2 - 2x + 6$, ainsi qu'une fonction `F2` implémentant sa primitive F_2 telle que $F_2(0) = 0$. Faire de même avec $f(x) = \cos(x)$.
4. Implémenter une fonction python pour tracer l'erreur de quadrature de la méthode de Simpson en fonction de n , pour une fonction f donnée.
5. Tracer cette erreur pour les fonctions f_2 et f . Commenter.

4 Comparaison des méthodes

1. Comparer les valeurs approchées de $\int_0^1 \sqrt{x} \exp(x^2) dx$ obtenues avec les différentes méthodes pour $n = 10, 100, 1000$. Commenter.
2. Implémenter une fonction python pour tracer sur un même graphique l'évolution de l'erreur de quadrature de chacune des méthodes en fonction de n , en échelle log – log, pour une fonction f donnée.
3. Tracer l'évolution de l'erreur en fonction de n pour la fonction $f(x) = \sin(x)$. Commenter.

5 Vectorisation et vitesse d'exécution

Pour obtenir le temps d'exécution d'une fonction `toto` nous pouvons utiliser le code python suivant

```
import time

start = time.time()
toto()
end = time.time()
print(end - start)
```

1. Calculer le temps d'exécution des méthodes précédentes pour déterminer une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{x} \exp(x^2) dx$, avec $n = 10^5$. Commenter.
2. En utilisant les fonction `np.linspace` et `np.sum`, ré-implémenter la méthode des trapèzes. Vérifier votre méthode.
3. Calculer les vitesses d'exécution des deux implémentations de la méthode des trapèzes pour $n = 2^{22}$.
4. Calculer le facteur d'efficacité défini comme le rapport des deux temps d'exécutions. Commenter.