

Examen Final - Analyse Numérique

Durée : 2 heures – Documents interdits

La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements et la précision des justifications seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 : Questions de compréhension

- 1. Quadrature :** Soit $J(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$ une formule de quadrature sur $[a, b]$.
 - (a) Si les points x_i sont fixés arbitrairement, quel degré d'exactitude maximal peut-on garantir au minimum en ajustant les poids λ_i ?
 - (b) Si l'on a la liberté de choisir à la fois les points x_i et les poids λ_i de manière astucieuse, quel est le degré d'exactitude maximal que l'on a vu en cours ? Comment se nomment ces points spécifiques ?
- 2. Matrices et Valeurs Propres :** Soit A une matrice symétrique réelle. Expliquez pourquoi l'algorithme QR appliqué à A est beaucoup plus efficace si l'on transforme d'abord A en une matrice tridiagonale. Cette structure tridiagonale est-elle préservée au cours des itérations ? Justifiez.
- 3. Stabilité EDO :** On considère le problème modèle $u' = \lambda u$ avec $\lambda < 0$. Expliquez pourquoi une méthode implicite est généralement préférée à une méthode explicite pour résoudre ce problème si $|\lambda|$ est très grand (problème raide).

Problème 1 : Construction d'une méthode de Gauss-Legendre

On se place sur l'intervalle de référence $I = [0, 1]$. On cherche à construire une méthode d'intégration numérique à **deux points** ($n = 1$) qui soit la plus précise possible. La formule cherchée est de la forme :

$$J(f) = \omega_0 f(\xi_0) + \omega_1 f(\xi_1)$$

avec $0 < \xi_0 < \xi_1 < 1$.

Partie A : Détermination des points d'intégration

On rappelle que pour obtenir l'ordre maximal, les points ξ_0, ξ_1 doivent être les racines du polynôme orthogonal de degré 2 défini sur $[0, 1]$. On considère la famille des polynômes de Legendre translatés sur $[0, 1]$ obtenue par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $\{1, x, x^2\}$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$.

On donne : $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$.

1. Déterminer le polynôme $L_2(x)$ de degré 2, unitaire (coefficient dominant 1), orthogonal à L_0 et L_1 .
2. Calculer les racines de $L_2(x)$. En déduire les valeurs exactes des points de Gauss ξ_0 et ξ_1 .

Partie B : Calcul des poids et ordre

1. Écrire le système linéaire permettant de déterminer les poids ω_0 et ω_1 pour que la méthode soit exacte pour les polynômes de degré ≤ 1 .

2. Résoudre ce système et donner les valeurs de ω_0 et ω_1 .
3. La méthode ainsi construite est-elle exacte pour le polynôme $P(x) = x^2$? Et pour $P(x) = x^3$? Justifiez votre réponse sans calcul intégral explicite, en utilisant la théorie de la quadrature de Gauss.
4. Comparer le degré d'exactitude de cette méthode (à 2 points) avec celui de la méthode de Simpson (qui utilise 3 points). Conclure sur l'efficacité de la méthode de Gauss.

Problème 2 : Analyse d'une famille de θ -schémas

On souhaite résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On introduit une subdivision régulière $t_n = nh$ avec $h > 0$. On considère la famille de schémas numériques paramétrée par un réel $\theta \in [0, 1]$ définie par :

$$u_{n+1} = u_n + h [(1 - \theta)f(t_n, u_n) + \theta f(t_{n+1}, u_{n+1})]$$

Partie A : Identification et Consistance

1. À quelles méthodes classiques correspondent les cas $\theta = 0$ et $\theta = 1$? Précisez pour chacune si le schéma est explicite ou implicite.
2. On définit l'erreur de consistance locale par :

$$e_n(\theta) = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h [(1 - \theta)y'(t_n) + \theta y'(t_{n+1})]$$

En utilisant des développements de Taylor de $y(t_{n+1})$ et $y'(t_{n+1})$ au voisinage de t_n , montrer que :

$$e_n(\theta) = h^2 \left(\frac{1}{2} - \theta \right) y''(t_n) + O(h^3)$$

3. En déduire l'ordre de consistance du schéma en fonction de la valeur de θ . Quel est le choix optimal de θ ?

Partie B : Stabilité

On applique ce schéma à l'équation test $y' = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda < 0$.

1. Montrer que la relation de récurrence peut s'écrire sous la forme $u_{n+1} = R(h\lambda)u_n$ où $R(x)$ est une fonction rationnelle (appelée facteur d'amplification) que l'on exprimera en fonction de θ et de x .
2. On rappelle que pour cette équation, le schéma est dit **A-stable** si la suite (u_n) ne diverge pas lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui impose la condition $|R(h\lambda)| \leq 1$.
 - (a) **Cas $\theta = 0$ (Euler explicite)** : Donner l'expression de $R(h\lambda)$. En déduire pour quelles valeurs du pas h le schéma est A-stable. Retrouve-t-on la condition $h \leq \frac{2}{|\lambda|}$ vue en cours?
 - (b) **Cas $\theta = 1$ (Euler implicite)** : Donner l'expression de $R(h\lambda)$. Montrer que pour tout $h > 0$, on a $|R(h\lambda)| < 1$. Que peut-on dire de la stabilité de ce schéma par rapport au pas de temps?
 - (c) **Cas $\theta = \frac{1}{2}$ (Trapèzes)** : Exprimer $R(h\lambda)$. Montrer que ce schéma est A-stable pour tout $h > 0$ (stabilité inconditionnelle), tout en étant plus précis que le schéma d'Euler implicite.

Problème 3 : Stabilité numérique et Spectre matriciel

On considère le système différentiel linéaire suivant, où $Y(t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), & t \in [0, T] \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$$

Partie A : Analyse Spectrale de la matrice A

Avant de résoudre le système, on cherche à caractériser les valeurs propres de A , notées λ_1 et λ_2 .

1. **Localisation (Gershgorin)** : Sans calculer le polynôme caractéristique, utiliser le **Théorème de Gershgorin** pour déterminer un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant toutes les valeurs propres de A .
2. **Calcul exact** : Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer les valeurs exactes de λ_1 et λ_2 . Vérifier qu'elles appartiennent bien à l'intervalle I trouvé à la question précédente.
3. **Conditionnement** : La matrice A est symétrique réelle.
 - (a) Rappeler pourquoi A est diagonalisable dans une base orthonormée.
 - (b) On note P la matrice de passage. Quel est le conditionnement $\kappa_2(P)$?
 - (c) Que peut-on en déduire sur la sensibilité des valeurs propres aux erreurs d'arrondi (Théorème de Bauer-Fike) ?

Partie B : Résolution numérique par Euler Explicite

On souhaite approcher la solution $Y(t)$ par la méthode d'Euler explicite avec un pas de temps constant $h > 0$. On note Y_n l'approximation de $Y(t_n)$ où $t_n = nh$.

1. **Mise en équation** : Écrire la relation de récurrence liant Y_{n+1} à Y_n sous la forme $Y_{n+1} = M_h Y_n$, où M_h est une matrice dépendant de I_2 (identité), h et A .
2. **Stabilité du système** : On admet que la méthode est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice d'itération M_h sont de module inférieur ou égal à 1.
 - (a) Exprimer les valeurs propres μ_1, μ_2 de M_h en fonction de h et des valeurs propres λ_1, λ_2 de A .
 - (b) En déduire deux inégalités portant sur h pour garantir la stabilité.
 - (c) Calculer la valeur maximale h_{max} du pas de temps pour laquelle la méthode reste A-stable.
3. **Lien avec la Méthode de la Puissance** : On suppose que l'on choisit un pas h tel que la méthode est instable (par exemple $h = 0.2$). On considère la suite de vecteurs définie par $Y_{n+1} = M_h Y_n$.
 - (a) Quelle est la valeur propre dominante de la matrice M_h dans ce cas ?
 - (b) D'après le théorème de convergence de la **méthode de la puissance**, vers quelle direction le vecteur Y_n va-t-il s'aligner lorsque $n \rightarrow +\infty$? Comment évolue la norme de Y_n ? Cela correspond-il au comportement physique attendu de la solution exacte $Y(t)$ (qui doit tendre vers 0 car les valeurs propres de A sont négatives) ?