

Travaux Dirigés : Résolution numérique des équations différentielles (EDO)

Exercice 1 : Schéma d'Euler amélioré

On considère l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$. Montrer que le schéma numérique défini ci-dessous est d'ordre 2 :

$$x_{k+1} = x_k + hf \left(x_k + \frac{h}{2} f(x_k) \right)$$

On étudiera pour cela l'erreur de consistance locale $E(h)$.

Exercice 2 : Méthode de Heun

On considère le schéma suivant :

$$x_{i+1} = \frac{x_* + x_{**}}{2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_* = x_i + hf(x_i) \\ x_{**} = x_i + hf(x_*) \end{cases}$$

1. Écrire ce schéma sous la forme $x_{i+1} = x_i + h\Phi(t_i, x_i, h)$.
2. Calculer l'erreur de consistance locale et montrer que ce schéma est d'ordre 2.

Exercice 3 : Schéma paramétré

Soit le schéma numérique défini par :

$$x_{i+1} = x_i + \alpha hf(x_i) + \beta hf(x_i + \alpha hf(x_i))$$

1. **Détermination de α et β :** Déterminer les valeurs de α et β pour que le schéma soit d'ordre 2. On admettra que les solutions sont $\alpha, \beta = \frac{1 \pm i}{2}$.
2. **Stabilité :** Montrer que le schéma est stable au sens de la 0-stabilité. On supposera que f est L -Lipschitzienne et on montrera que la fonction incrément $\Phi(t, x, h)$ est uniformément Lipschitzienne par rapport à x .
3. **Intérêt de la méthode :** Expliquer l'intérêt d'utiliser des coefficients complexes par rapport aux méthodes réelles classiques (type Euler ou Heun), notamment en termes de précision numérique et d'estimation de dérivée.

Exercice 4 : Runge-Kutta RK3

On considère l'équation différentielle autonome $y'(t) = f(y(t))$. Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (RK3) est défini par le tableau de Butcher correspondant :

0	0	0	0
1/2	1/2	0	0
1	-1	2	0
	1/6	2/3	1/6

1. Écrire explicitement la fonction incrément $\Phi(y_n, h)$ telle que $y_{n+1} = y_n + h\Phi(y_n, h)$.
2. Démontrer que ce schéma est d'ordre 3 en effectuant un développement de Taylor de la solution exacte et de la solution numérique (erreur de consistance en $O(h^4)$).

Exercice 5 : Épidémiologie

On considère le modèle logistique d'évolution d'une population infectée :

$$x' = \alpha x(\beta - x) \quad \text{avec } \beta = 0.5$$

1. Sachant qu'au début de l'épidémie ($x \ll \beta$), le nombre de cas est multiplié par 1.2 par jour, déterminer la valeur du paramètre α .
2. Déterminer la valeur de la population x_{pic} pour laquelle la vitesse de contamination est maximale (pic épidémique).

Exercice 6 : Modèle de Lotka-Volterra

On considère le système différentiel proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

Avec les paramètres : $a = \frac{\ln 2}{90}$, $c = \frac{\ln 10}{30}$, $b = a/10$, $d = c/100$.

1. **Courbes intégrales :** En calculant $\frac{dy}{dx}$, trouver une fonction $F(x, y)$ invariante au cours du temps (intégrale première). En déduire la nature géométrique des trajectoires dans le plan de phase.
2. **Implémentation :** Écrire un programme (Python) permettant de résoudre ce système sur $[0, T_{max}]$ avec $T_{max} = 1000$ et la condition initiale $x_0 = 150, y_0 = 20$. Comparer les méthodes d'Euler explicite, Euler amélioré (Heun) et Runge-Kutta 4 (RK4) pour différents pas de temps.

Exercice 7 : Convergence d'Euler

On considère le problème de Cauchy sur $[0, T]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La fonction f est supposée de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et L -Lipschitzienne. On note $x_{i+1} = x_i + hf(x_i)$ le schéma d'Euler explicite.

1. Montrer que la solution exacte x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, T]$.
2. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que l'erreur de consistance locale $E(h)$ s'écrive en fonction de $x''(t + \theta h)$.
3. En déduire qu'il existe une constante C telle que l'erreur locale soit majorée par Ch^2 .
4. Soit $e_i = x_i - x(t_i)$ l'erreur globale à l'étape i . Montrer que l'erreur vérifie la récurrence :

$$|e_{i+1}| \leq (1 + Lh)|e_i| + Ch^2$$

5. Montrer par récurrence que pour tout entier i , $|e_i| \leq e^{iLh}Ch^2$.
6. En déduire une majoration de l'erreur globale $e(h) = \max_i |e_i|$ sur l'intervalle $[0, T]$ et conclure sur l'ordre de convergence de la méthode d'Euler.