

TD : Polynômes Orthogonaux (Niveau L3)

Exercice 1 : Polynômes de Legendre

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

1. Au moyen du procédé de Gram-Schmidt non normalisé appliqué à la base canonique, calculer les polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre 3 (L_0, L_1, L_2, L_3) sur l'intervalle $[-1, 1]$. On rappelle que les polynômes de Legendre (L_n) sont normalisés tels que $L_n(1) = 1$.
2. Justifier le calcul des coefficients α_n et λ_n intervenant dans l'algorithme, puis vérifier les résultats avec la relation de récurrence du cours.
3. On note L_k le polynôme de Legendre de degré k et (x_i^k) ses racines. Vérifier pour $k \leq 3$ la propriété d'entrelacement des racines :

$$x_i^k < x_i^{k-1} < x_{i+1}^k$$

4. Soit $H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$. Montrer que H_n est un polynôme de degré n .
5. Montrer que H_n est orthogonal à tous les polynômes de degré strictement inférieur à n .
6. En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $H_n(1) = 2^n n!$.
7. En déduire la formule de Rodrigues :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

8. En utilisant la formule de Rodrigues, déterminer le coefficient du terme en x^n et celui du terme en x^{n-2} de $L_n(x)$. En déduire la relation de récurrence de Bonnet :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

Exercice 2 : Polynômes de Tchebychev

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'application définie ci-dessous est un produit scalaire sur E :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

2. Soit $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Montrer par récurrence que T_n est un polynôme de degré n .
Indication : Utiliser la relation $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
3. Montrer que la famille (T_n) est orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 3 : Approximation

1. Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. Calculer le projeté orthogonal de la fonction $f(x) = \exp(x)$ sur E en utilisant les calculs de l'exercice 1.

Exercice 4 : Polynômes d'Hermite

On considère la suite de fonctions définie par $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2)$.

1. Montrer que H_n est un polynôme de degré n et établir une relation de récurrence sur H_n .
2. Montrer que ces polynômes sont orthogonaux pour le produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t) \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$$