

TD : Calcul des Valeurs Propres

Exercice 1 : Méthode de la puissance itérée

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. On note $(\lambda_i)_{i=1\dots N}$ ses valeurs propres. On suppose qu'il existe une unique valeur propre dominante telle que :

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, \quad \forall i > 1$$

On considère l'algorithme de la puissance itérée vu en cours, défini par un vecteur initial $x_0 \in \mathbb{C}^N$ (avec $\|x_0\| = 1$) et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{\|Ax_n\|}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x_n = \frac{A^n x_0}{\|A^n x_0\|}$$

2. À quelle condition sur le vecteur initial x_0 la suite (x_n) converge-t-elle vers un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 ? (Justifiez en vous appuyant sur la décomposition de x_0 dans une base de vecteurs propres).
3. En utilisant le quotient de Rayleigh, expliquer comment obtenir une estimation de la valeur propre λ_1 à partir de la suite (x_n) .
4. Tester l'algorithme (à la main sur quelques itérations ou en python) pour la matrice tridiagonale A de taille $N = 5$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. On suppose maintenant que l'on recherche la valeur propre de plus petit module, c'est-à-dire que $\forall i > 1, |\lambda_1| < |\lambda_i|$. Comment adapter l'algorithme précédent pour trouver λ_1 et un vecteur propre associé (méthode de la puissance itérée inverse) ?

Exercice 2 : Orthogonalisation et décomposition QR

En lien avec la section du cours sur l'algorithme QR, soit $A = (a_1 \dots a_n)$ une matrice carrée inversible identifiée par ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{R}^n$.

1. En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une base orthonormée $(q_1 \dots q_n)$ et des réels (r_{ij}) (avec $1 \leq i \leq j \leq n$) tels que :

$$a_j = \sum_{i=1}^j r_{ij} q_i$$

2. En déduire une méthode pour calculer la décomposition $A = QR$, où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 3 : Calcul des valeurs propres suivantes (Déflation)

Soit A une matrice symétrique définie positive. On suppose que ses valeurs propres sont simples et ordonnées :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$$

On suppose avoir déterminé λ_1 et un vecteur propre unitaire associé v_1 (par exemple via la méthode de la puissance). Pour rechercher λ_2 , on s'inspire de la méthode de déflation de Hotelling.

Soit $s \in \mathbb{R}^n$ un vecteur initial arbitraire. On pose $x_0 = s - (v_1^T s)v_1$. On construit ensuite l'itération suivante : $y_1 = Ax_0 - (v_1^T Ax_0)v_1$, puis on normalise en posant $x_1 = y_0/\|y_0\|$.

1. Démontrer que le vecteur y_1 est orthogonal à v_1 .
2. En déduire un algorithme itératif complet pour le calcul de λ_2 et d'un vecteur propre associé, en veillant à maintenir l'orthogonalité avec v_1 à chaque itération.
3. Comment généraliser ce processus pour calculer l'ensemble des valeurs propres de la matrice A ?

Exercice 4 : Décalage spectral (Shift)

Soit A une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont simples. Soit $\mu \in \mathbb{C}$ un complexe supposé proche d'une valeur propre λ_k de A (c'est-à-dire que $|\lambda_k - \mu| < |\lambda_j - \mu|$ pour tout $j \neq k$).

1. Proposer un algorithme basé sur la méthode de la puissance itérée pour trouver la valeur propre de A la plus proche de μ , ainsi qu'un vecteur propre associé.
2. Préciser les conditions mathématiques garantissant la convergence de cet algorithme.

Exercice 5 : Localisation par les disques de Gerschgorin

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $N \times N$. On rappelle que le i -ème disque de Gerschgorin D_i est défini par :

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

1. Énoncer et redémontrer brièvement le théorème de Gerschgorin : si λ est une valeur propre de A , alors $\lambda \in \bigcup_i D_i$.
2. On définit maintenant les disques par rapport aux colonnes :

$$D'_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right\}$$

Montrer que l'on a également $\lambda \in \bigcup_i D'_i$.

3. **Application :** Tracer les disques de Gerschgorin D_i et D'_i pour la matrice A ci-dessous, puis calculer ses valeurs propres exactes pour vérifier le théorème :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Rotations de Givens (A connaître)

On appelle matrice de rotation de Givens, et on note $G(i, j, \theta)$, la matrice identité dans laquelle on a modifié quatre éléments aux intersections des lignes et colonnes $1 \leq i < j \leq N$: $G_{ii} = \cos \theta$, $G_{jj} = \cos \theta$, $G_{ij} = -\sin \theta$ et $G_{ji} = \sin \theta$.

1. Montrer que la matrice $G(i, j, \theta)$ est une matrice orthogonale.
2. Soit A une matrice $N \times N$. Soient i et c des entiers tels que $c < i \leq N$. Montrer qu'il existe un angle θ tel que l'élément en position (i, c) de la matrice $G(j-1, j, \theta)A$ soit nul.
3. En déduire le principe d'un algorithme itératif pour calculer la décomposition QR d'une matrice A .
4. Appliquer cette méthode pour annuler le coefficient en position $(3, 1)$ de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Réflections de Householder (A connaître)

Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$. On s'intéresse aux matrices de la forme $Q = I - 2uu^T$ avec $\|u\| = 1$, appelées matrices de réflexion de Householder.

1. Montrer qu'une matrice de Householder Q est symétrique et orthogonale.
2. Soit $x \neq 0$ un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il est possible de choisir un vecteur unitaire u tel que Qx soit colinéaire au premier vecteur de la base canonique e_1 . (Ceci permet de mettre des zéros sous le premier coefficient d'une colonne).
3. En appliquant successivement des transformations de similitude avec des matrices de Householder (i.e. $A \leftarrow QAQ^T$), montrer que l'on peut transformer A en une matrice de Hessenberg supérieure H (où $H_{ij} = 0$ pour $i > j + 1$).
4. Montrer que si la matrice A de départ est symétrique, alors la matrice de Hessenberg H obtenue est tridiagonale symétrique.
5. Montrer que si la matrice H de départ est symétrique, alors les matrices $(H_k)_k$ définies par itération successives de l'algorithme QR sont de Hessenberg.
6. Quel est l'intérêt de cette transformation préalable pour accélérer l'algorithme QR vu en cours ?