

# Feuille d'exercices de synthèse : Méthodes Numériques (Niveau L3)

L'objectif de ces quatre exercices est de faire la synthèse des concepts abordés en TD (intégration numérique, polynômes orthogonaux, calcul de valeurs propres et équations différentielles) en mettant l'accent sur les démonstrations théoriques et les liens entre les chapitres.

La difficulté des exercices est élevée et ne correspond pas forcément à ce qui est attendu en CC. Il s'agit juste de tester votre compréhension des concepts.

## Exercice 1 : Quadrature asymétrique et analyse d'erreur par interpolation d'Hermite

Cet exercice fait la synthèse entre la construction de formules de quadrature (type Gauss-Radau) et la démonstration rigoureuse de l'erreur via l'interpolation polynomiale.

On cherche à construire et analyser une formule de quadrature sur l'intervalle  $[-1, 1]$  de la forme :

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx w_0 f(-1) + w_1 f(x_1)$$

où  $x_1 \in ]-1, 1[$ .

1. **Détermination des paramètres** : Déterminer les poids  $w_0, w_1$  et le nœud  $x_1$  pour que cette formule soit exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible. Quel est ce degré maximal  $d_{max}$ ? (Note : Vous devriez retrouver les résultats d'un exercice précédent, mais la suite est nouvelle).
2. **Polynôme nodal** : On pose  $M(t) = (t + 1)(t - x_1)^2$ . Montrer que la formule de quadrature appliquée à ce polynôme  $M$  donne exactement zéro, c'est-à-dire que  $w_0 M(-1) + w_1 M(x_1) = 0$ .
3. **Interpolation d'Hermite généralisée** : Soit  $f \in \mathcal{C}^3([-1, 1])$ . Justifier qu'il existe un unique polynôme  $H_2 \in \mathbb{P}_2$  tel que :

$$H_2(-1) = f(-1), \quad H_2(x_1) = f(x_1), \quad \text{et} \quad H_2'(x_1) = f'(x_1)$$

4. **Expression de l'erreur** : Montrer que l'erreur d'interpolation est donnée par  $f(t) - H_2(t) = \frac{f^{(3)}(\xi_t)}{6} M(t)$  avec  $\xi_t \in ]-1, 1[$ .
5. **Erreur de quadrature** : En déduire, en adaptant la démonstration du cours sur la quadrature de Gauss, que l'erreur de la méthode de quadrature  $E(f) = \int_{-1}^1 f(t)dt - (w_0 f(-1) + w_1 f(x_1))$  peut s'écrire sous la forme :

$$E(f) = C f^{(3)}(\eta)$$

avec  $\eta \in ]-1, 1[$ . Calculer explicitement la constante  $C$  en évaluant  $\frac{1}{6} \int_{-1}^1 M(t)dt$ .

## Exercice 2 : Zéros des polynômes orthogonaux et optimalité de Tchebychev

Cet exercice valide la compréhension profonde de la théorie des polynômes orthogonaux et introduit la notion d'approximation minimax (norme infinie).

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$  où  $w(t) > 0$  est une fonction poids continue.

- Propriété fondamentale des racines :** Démontrer rigoureusement que pour tout  $n \geq 1$ , le polynôme  $P_n$  admet exactement  $n$  racines réelles, distinctes, et toutes situées dans l'intervalle ouvert  $]a, b[$ . (Indication : raisonner par l'absurde en considérant les changements de signe de  $P_n$ ).
- Polynômes de Tchebychev :** On se place sur  $[-1, 1]$  avec  $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ . On rappelle que  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ . Dédurre de la question 1 (ou par calcul direct) les expressions des  $n$  racines de  $T_n$ , ainsi que les points de  $[-1, 1]$  où  $|T_n(x)|$  atteint son maximum.
- Coefficient dominant :** On rappelle la relation de récurrence des polynômes de Tchebychev :  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$  avec  $T_0(x) = 1$  et  $T_1(x) = x$ . Quel est le coefficient du terme de plus haut degré (en  $x^n$ ) du polynôme  $T_n$  pour  $n \geq 1$ ? En déduire un polynôme unitaire  $\tilde{T}_n$  colinéaire à  $T_n$ .
- Propriété Minimax (Subtilité du cours) :** Soit  $\mathbb{P}_n^1$  l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $n$ . Démontrer que  $\tilde{T}_n$  est le polynôme qui minimise la norme infinie sur  $[-1, 1]$  parmi tous les polynômes de  $\mathbb{P}_n^1$ . Autrement dit, montrer que :  $\forall Q \in \mathbb{P}_n^1, \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |Q(x)|$ . (Indication : Supposer qu'il existe  $Q$  tel que  $\|Q\|_\infty < \|\tilde{T}_n\|_\infty$  et étudier les signes de  $\tilde{T}_n(x) - Q(x)$  aux extremums de  $T_n$ ).

## Exercice 3 : Localisation spectrale et accélération de la méthode de la puissance

Cet exercice combine la théorie de localisation (Gerschgorin) étudiée en TD avec la méthode de la puissance itérée inverse avec décalage (Shifted Inverse Power Method).

Soit la matrice  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & -1 \end{pmatrix}$$

On suppose que  $A$  est diagonalisable de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ .

- Localisation :** Utiliser les disques de Gerschgorin pour déterminer quatre intervalles disjoints contenant chacun exactement une valeur propre de  $A$ . (On admettra que l'application qui à un polynôme associe ses racines est continue).
- Principe du décalage (Shift) :** On cherche à calculer précisément la valeur propre située aux alentours de 2. Pour cela, on choisit un scalaire  $\mu = 2$ . On admettra que la matrice  $(A - \mu I)$  est inversible. On applique ensuite la méthode de la puissance itérée à la matrice  $B = (A - \mu I)^{-1}$ . Expliquer mathématiquement pourquoi la valeur propre de  $B$  de plus grand module correspond à la valeur propre de  $A$  la plus proche de  $\mu$ .
- Vitesse de convergence :** Soit  $(x_k)$  la suite des vecteurs générés par l'algorithme  $x_{k+1} = \frac{Bx_k}{\|Bx_k\|}$ . Exprimer le taux de convergence asymptotique de cette suite en fonction des valeurs propres de  $A$  et de  $\mu$ .

4. **Subtilité - Quotient de Rayleigh** : Au lieu de garder  $\mu$  constant, on propose d'actualiser  $\mu$  à chaque itération en posant  $\mu_k = \frac{x_k^T A x_k}{x_k^T x_k}$  (Itération du quotient de Rayleigh). Justifier qualitativement pourquoi cette méthode devrait converger plus rapidement que la méthode avec  $\mu$  fixe.
5. **Preuve de la convergence cubique** : Remarquons que la matrice  $A$  de notre exercice est **symétrique**. On se place dans un cadre général où une matrice symétrique  $A$  possède une valeur propre simple  $\lambda$  de vecteur propre associé  $v$  (avec  $\|v\|_2 = 1$ ). Soit  $x_k$  une approximation de  $v$  à l'itération  $k$ , telle que  $\|x_k\|_2 = 1$ .

On décompose  $x_k$  de manière orthogonale :

$$x_k = \cos(\theta_k)v + \sin(\theta_k)w_k$$

avec  $w_k \perp v$ ,  $\|w_k\|_2 = 1$ , et où  $\varepsilon_k = \sin(\theta_k)$  représente l'erreur d'alignement à l'étape  $k$  (que l'on suppose petite,  $\varepsilon_k \ll 1$ ).

- (a) **Erreur quadratique du quotient de Rayleigh** : En utilisant la décomposition de  $x_k$ , montrer que le quotient de Rayleigh  $\mu_k = x_k^T A x_k$  vérifie :

$$\mu_k - \lambda = \sin^2(\theta_k)(w_k^T A w_k - \lambda)$$

En déduire que l'erreur sur l'estimation de la valeur propre est d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon_k^2)$ .

- (b) **Étape d'inversion** : L'algorithme se poursuit en résolvant le système  $(A - \mu_k I)y_k = x_k$ . On écrit la solution sous la forme  $y_k = \alpha_k v + z_k$ , avec  $z_k \perp v$ . Exprimer  $\alpha_k$  en fonction de  $\theta_k$ ,  $\lambda$  et  $\mu_k$ . Déduire de la question précédente que le coefficient  $\alpha_k$  est amplifié de manière spectaculaire et est d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon_k^{-2})$ .
- (c) **Borne sur la composante orthogonale** : On note  $\delta > 0$  la distance absolue entre  $\lambda$  et le reste du spectre de  $A$  (le "trou spectral"). En justifiant que la plus petite valeur propre de la restriction de  $(A - \mu_k I)$  à l'orthogonal de  $v$  est minorée par approximativement  $\delta$ , montrer que :

$$\|z_k\|_2 = \mathcal{O}(\varepsilon_k)$$

- (d) **Conclusion sur la convergence cubique** : Le nouveau vecteur itéré est  $x_{k+1} = \frac{y_k}{\|y_k\|_2}$ . Justifier que l'erreur de direction au rang  $k+1$ , notée  $\varepsilon_{k+1}$ , est proportionnelle au ratio  $\frac{\|z_k\|_2}{|\alpha_k|}$ . Conclure que :

$$\varepsilon_{k+1} = \mathcal{O}(\varepsilon_k^3)$$

## Exercice 4 : Stabilité et convergence globale d'un schéma implicite (EDO autonome)

*Cet exercice fait le lien entre la consistance (ordre d'un schéma) via Taylor et la preuve de convergence globale via le lemme de Gronwall discret, en introduisant la notion de A-stabilité.*

On considère le problème de Cauchy autonome  $y'(t) = f(y(t))$  sur  $[0, T]$  avec  $y(0) = y_0$ , et on s'intéresse au schéma numérique paramétré par  $\theta \in [0, 1]$  :

$$y_{n+1} = y_n + h[(1 - \theta)f(y_n) + \theta f(y_{n+1})]$$

1. **Analyse de l'ordre** : En supposant la solution exacte suffisamment régulière, effectuer un développement de Taylor pour exprimer l'erreur de consistance locale  $E(h)$ . Déterminer l'ordre  $p$  du schéma en fonction de la valeur de  $\theta$ . Quelle valeur de  $\theta$  donne l'ordre maximal ? Comment s'appelle ce schéma spécifique ?

2. **Convergence globale** : On suppose que  $f$  est globalement  $L$ -lipschitzienne. On note  $e_n = y_n - y(t_n)$  l'erreur globale. Montrer que pour  $h$  suffisamment petit (préciser la condition), l'erreur vérifie une récurrence de la forme :

$$|e_{n+1}| \leq \left( \frac{1 + h(1 - \theta)L}{1 - h\theta L} \right) |e_n| + Ch^{p+1}$$

En déduire que  $\lim_{h \rightarrow 0} \max_n |e_n| = 0$  et retrouver l'ordre de convergence global du schéma.

3. **A-stabilité (Subtilité)** : On applique ce schéma à l'équation différentielle linéaire scalaire test  $y' = \lambda y$  (avec  $\lambda < 0$ ). Déterminer la fonction d'amplification  $R(z)$  (où  $z = \lambda h$ ) telle que  $y_{n+1} = R(z)y_n$ .
4. Montrer que pour  $\theta \geq 1/2$ , on a  $|R(z)| < 1$  pour tout  $h > 0$ . Quel est l'avantage majeur d'un tel schéma implicite par rapport aux schémas explicites vus en TD (Euler explicite, RK4) pour des équations dites "raides" ?