

Introduction à la théorie des Équations Différentielles Partielles Stochastiques

Eliott Oster et Mathias Dus

1^{er} octobre 2026

Licence de diffusion

© 2026 Eliott Oster et Mathias Dus.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence

**Creative Commons Attribution – Pas d’Utilisation Commerciale – Pas de Modification 4.0 International
(CC BY-NC-ND 4.0).**

Vous êtes libre de partager, copier et redistribuer ce document par tout moyen et sous tout format, selon les conditions suivantes : attribution obligatoire de la paternité aux auteurs, aucune utilisation commerciale, et interdiction de modification ou de diffusion d’œuvres dérivées.

Table des matières

1	Introduction et Motivations	3
2	Fondations Topologiques et Géométrie des Mesures Gaussiennes	4
2.1	Mesures de probabilité sur les espaces polonais	4
2.2	Théorie de la mesure Gaussienne	9
2.3	Structure géométrique	21
3	Modélisation du Bruit en Dimension Infinie	42
3.1	Le Mouvement Brownien Cylindrique	42
3.2	L'Intégrale Stochastique	48
4	Théorie des Semi-groupes et Équation de la Chaleur Stochastique	57
4.1	Rappels sur la théorie des Semi-groupes	57
4.2	Application au Laplacien et à l'équation de la chaleur déterministe	63
4.3	Solution <i>mild</i> et régularité de l'équation de la chaleur stochastique	67
5	Analyse numérique, schémas de discrétisation et simulations	74
5.1	Approximation spectrale de Galerkin et troncature du bruit cylindrique	74
5.2	Schémas de discrétisation	78
5.3	Simulations	84

1 Introduction et Motivations

Ce cours a pour objectif d'introduire la théorie des Équations Différentielles Partielles Stochastiques (EDPS). Afin d'asseoir rigoureusement cette théorie, nous commencerons par définir le cadre topologique des mesures de probabilité sur les espaces polonais. Ensuite, nous mettrons en place le cadre théorique en étendant les concepts de mouvement brownien et d'intégrale d'Itô à des espaces de Hilbert. Nous allons notamment construire le bruit blanc spatio-temporel et le mouvement brownien cylindrique. D'autre part, nous définirons l'intégrale stochastique en dimension infinie grâce à l'approche fonctionnelle de Da Prato-Zabczyk [3], modernisée par Hairer [7]. Une fois ces notions introduites, nous étudierons une EDPS linéaire, à savoir l'équation de la chaleur stochastique. Pour cela, nous ferons des rappels sur la théorie des semi-groupes pour l'opérateur de la chaleur déterministe, puis nous définirons et démontrerons l'existence et l'unicité d'une solution au sens *mild* via la formule de Duhamel stochastique. Enfin, nous validerons notre approche théorique à l'aide de l'analyse numérique et de simulations. Le cours abordera la discrétisation de cette EDPS via les schémas d'Euler-Maruyama explicite et implicite en temps et la méthode des éléments finis spectraux en espace. Cette discrétisation nous permettra d'analyser la vitesse de convergence forte et faible des schémas numériques implémentés et de mettre en évidence la régularité höldérienne des trajectoires simulées.

Objectif de l'étude : Le point de départ naturel de notre réflexion est l'équation de la chaleur déterministe classique, $\partial_t u = \Delta u$. Dans de nombreux modèles physiques, la dynamique macroscopique est soumise à des fluctuations thermiques ou structurelles à l'échelle microscopique. L'ambition est alors de perturber cette dynamique lisse en y incorporant un terme de forçage stochastique, modélisé formellement par un bruit blanc spatio-temporel $\xi(t, x)$ (ou une différentielle $dW(t)$), pour obtenir l'équation de la chaleur stochastique.

Obstacle topologique et motivation théorique : En dimension finie, la construction d'un tel forçage repose sur le bruit blanc, défini rigoureusement comme la dérivée au sens des distributions du mouvement brownien standard. Toutefois, le passage à la dimension infinie — où l'état du système à l'instant t n'est plus un vecteur de $\mathbb{R}^n$ mais une fonction d'espace $u(t, \cdot)$ appartenant à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ — dresse un mur mathématique immédiat.

Un bruit blanc spatio-temporel idéal est censé exciter uniformément et de manière indépendante toutes les fréquences spatiales du système. Topologiquement, cela exigerait de construire un mouvement brownien $(W(t))_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ dont l'opérateur de covariance spatiale serait l'identité Id . Or, l'espérance de la norme au carré d'un tel processus stochastique est directement définie par la trace de son opérateur de covariance. L'espace $\mathcal{H}$ étant de dimension infinie, la trace de l'identité y diverge grossièrement, ce qui implique une explosion immédiate de la variance totale du processus.

En d'autres termes, le mouvement brownien standard n'existe tout simplement pas dans $\mathcal{H}$. Cette singularité fondamentale justifie à elle seule le besoin d'une nouvelle théorie. Avant de pouvoir résoudre la moindre EDPS, il est impératif de reconstruire rigoureusement la théorie géométrique des mesures gaussiennes sur des espaces de Banach et de Hilbert, ce qui nous permettra d'introduire des objets topologiques plus larges et adaptés, tels que le mouvement brownien cylindrique.

2 Fondations Topologiques et Géométrie des Mesures Gaussiennes

Ce chapitre pose les fondations topologiques et géométriques indispensables à l'étude des probabilités en dimension infinie. À partir de la structure des espaces polonais et des différents modes de convergence, nous construisons le cadre rigoureux nécessaire pour définir les mesures gaussiennes, caractériser leurs espaces de Cameron-Martin, et garantir l'unicité de leurs images sous l'action d'opérateurs linéaires.

2.1 Mesures de probabilité sur les espaces polonais

Dans cette première partie nous allons introduire le cadre topologique des espaces polonais ainsi que les différentes distances et modes de convergence nécessaires pour définir les objets plus complexes de la suite de ce cours.

Préliminaires

Cette sous-partie introduit les éléments mathématiques de base nécessaires pour comprendre la convergence des mesures de probabilité.

Définition 2.1 (Espaces polonais). *Un espace polonais $\mathcal{X}$ est un espace métrique, complet et séparable.*

Exemple 1. *Pour tout $1 \leq p < \infty$ et tout entier $n \geq 1$, les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ et les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ ($s \in \mathbb{R}$) sont des espaces polonais. En revanche, l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable, et n'est donc pas un espace polonais.*

Conventions et cadre mesurable. Dans toute la suite, tout espace métrique (ou polonais) $\mathcal{X}$ est implicitement muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, qui est la plus petite tribu contenant tous les ouverts de $\mathcal{X}$. Sauf mention contraire, une mesure (ou mesure de probabilité) sur $\mathcal{X}$ désignera systématiquement une mesure définie sur l'espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$. On notera $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathcal{X}$.

Définition 2.2 (Convergence faible). *Une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n \geq 1}$ sur $\mathcal{X}$ converge faiblement (ou étroitement) vers une mesure de probabilité μ si :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu_n(dx) = \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx),$$

pour toute fonction continue bornée $f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{X})$.

Définition 2.3 (Distance en variation totale). *La distance en variation totale entre deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathcal{X}$ est définie par :*

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) \right|,$$

avec $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)|$, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des fonctions boréliennes bornées $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 2.1. *L'application $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ définit une distance sur l'espace des mesures de probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.*

Démonstration. L'application $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ définit bien une distance sur l'espace des mesures de probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ car elle vérifie les trois propriétés fondamentales :

- **Séparation :** Si $\mu = \nu$, alors pour toute fonction borélienne bornée f , on a $\int_{\mathcal{X}} f d\mu - \int_{\mathcal{X}} f d\nu = 0$, donc $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = 0$.

Réciproquement, supposons que $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = 0$. Pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, la fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_A$ est borélienne et vérifie $\|\mathbf{1}_A\|_\infty \leq 1$. On a donc :

$$0 \leq |\mu(A) - \nu(A)| = \left| \int_{\mathcal{X}} \mathbf{1}_A(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} \mathbf{1}_A(x) \nu(dx) \right| \leq \|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = 0.$$

D'où $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, ce qui assure $\mu = \nu$.

- **Symétrie :** Par symétrie de la valeur absolue :

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) \right| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) \right| = \|\nu - \mu\|_{\text{TV}}.$$

- **Inégalité triangulaire :** Soient $\mu, \nu, \gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Pour toute fonction borélienne f telle que $\|f\|_\infty \leq 1$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ donne :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) \right| &\leq \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \gamma(dx) \right| + \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \gamma(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) \right| \\ &\leq \|\mu - \gamma\|_{\text{TV}} + \|\gamma - \nu\|_{\text{TV}}. \end{aligned}$$

En passant au supremum sur l'ensemble des fonctions boréliennes vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$, on en déduit que :

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} \leq \|\mu - \gamma\|_{\text{TV}} + \|\gamma - \nu\|_{\text{TV}}.$$

□

Définition 2.4 (Convergence forte). *Une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge fortement (au sens de la convergence simple sur la tribu borélienne) vers une mesure μ si :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A),$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Remarque 1 (Choix de la notion de convergence). *D'un point de vue intuitif, la convergence en variation totale ou la convergence forte (simple sur la tribu) peuvent sembler naturelles. Cependant, la topologie induite par la norme en variation totale est bien trop rigide : dès que $\mathcal{X}$ n'est pas dénombrable (par exemple $\mathbb{R}$ ou un espace de Hilbert), deux mesures de Dirac distinctes vérifient $\|\delta_x - \delta_y\|_{\text{TV}} = 2$, ce qui rend l'espace $(\mathcal{M}(\mathcal{X}), \|\cdot\|_{\text{TV}})$ non séparable et empêche des suites simples comme $\delta_{1/n}$ de converger vers δ_0 .*

La convergence faible (ou étroite) résout cette rigidité en restreignant les fonctions tests à l'espace $\mathcal{C}_b(\mathcal{X})$. Lorsque $\mathcal{X}$ est un espace polonais, l'espace des mesures de probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ muni de la convergence faible est lui-même métrisable et séparable (notamment via la distance de Lévy-Prokhorov ou la distance bornée-Lipschitz d_{BL}). C'est cette métrisabilité qui permet de quantifier les erreurs et d'analyser la vitesse de convergence faible des schémas numériques.

Voici quelques exemples qui montrent que certaines mesures convergent uniquement faiblement ou uniquement fortement et pas en variation totale.

Exemple 2. Pour $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, considérons la suite de mesures $\mu_n = \delta_{1/n}$ ($n \geq 1$). Elle converge faiblement vers $\mu = \delta_0$, mais ne converge ni fortement ni en variation totale vers δ_0 .

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Par définition de la mesure de Dirac, nous avons $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = f(1/n)$. Puis, par continuité de f en 0, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = f(0) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu.$$

La convergence faible est donc vérifiée.

Pour montrer que la convergence forte n'est pas vérifiée, il suffit de trouver un borélien A pour lequel cette convergence échoue. Si l'on choisit le singleton $A = \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\delta_{1/n}(A) = 0 \quad \text{et} \quad \delta_0(A) = 1.$$

Ainsi, comme :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{1/n}(A) = 0 \neq 1 = \delta_0(A),$$

la convergence forte n'est pas vérifiée. *A fortiori*, la convergence en variation totale ne l'est pas non plus, car elle est plus restrictive que la convergence forte (en effet, $\|\delta_{1/n} - \delta_0\|_{\text{TV}} = 2 \not\rightarrow 0$). □

Exemple 3. Soit μ_n la mesure sur $[0, \pi]$ définie par $\mu_n(dx) = \frac{2}{\pi} \sin^2(nx) dx$. La suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge fortement vers la mesure de Lebesgue normalisée $\mu(dx) = \frac{1}{\pi} dx$, mais la distance en variation totale $\|\mu_n - \mu\|_{\text{TV}}$ reste constante et égale à $2/\pi$.

Démonstration. Soit A un borélien de $[0, \pi]$. En considérant la fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_A$, nous avons :

$$\mu_n(A) = \int_0^\pi \mathbf{1}_A(x) \mu_n(dx) = \frac{2}{\pi} \int_A \sin^2(nx) dx.$$

En utilisant l'identité trigonométrique $\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$, nous obtenons :

$$\mu_n(A) = \frac{1}{\pi} \int_A (1 - \cos(2nx)) dx = \frac{1}{\pi} \int_A 1 dx - \frac{1}{\pi} \int_A \cos(2nx) dx.$$

D'où l'expression :

$$\mu_n(A) = \mu(A) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbf{1}_A(x) \cos(2nx) dx.$$

Comme la fonction $\mathbf{1}_A$ appartient à $L^1([0, \pi])$, le lemme de Riemann-Lebesgue assure que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \mathbf{1}_A(x) \cos(2nx) dx = 0.$$

Ainsi, nous obtenons bien la convergence forte :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}([0, \pi]).$$

Néanmoins, par définition variationnelle de la distance en variation totale :

$$\|\mu_n - \mu\|_{\text{TV}} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_0^\pi f(x) (\mu_n - \mu)(dx) \right| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(2nx) dx \right|.$$

Pour toute fonction borélienne f bornée par 1 ($\|f\|_\infty \leq 1$), on a :

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(2nx) dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(2nx)| dx.$$

En choisissant la fonction test $f(x) = \text{sgn}(\cos(2nx))$, qui est borélienne et vérifie $\|f\|_\infty \leq 1$, l'intégrale atteint exactement cette borne :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(2nx)| dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2n} \int_0^{2n\pi} |\cos(u)| du = \frac{1}{2n\pi} \cdot 2n \int_0^\pi |\cos(u)| du = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(u)| du = \frac{2}{\pi}.$$

Ainsi, $\|\mu_n - \mu\|_{\text{TV}} = \frac{2}{\pi}$ pour tout $n \geq 1$. Comme cette distance reste constante et ne tend pas vers 0, la convergence en variation totale n'est pas vérifiée. $\square$

Convergence en variation totale

Cette sous-partie introduit rigoureusement la notion de convergence en variation totale et certaines de ses propriétés.

Proposition 2.2. *Si deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathcal{X}$ possèdent des densités, notées respectivement D_μ et D_ν , par rapport à une mesure de référence positive γ , la distance en variation totale est donnée par l'identité suivante :*

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = \int_{\mathcal{X}} |D_\mu(x) - D_\nu(x)| \gamma(dx). \quad (*)$$

Cette formule (*) ne dépend pas de la mesure dominante γ et coïncide avec la forme variationnelle :

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) \right|.$$

Démonstration. Pour montrer que les deux définitions coïncident, nous partons de la définition variationnelle :

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) \right|.$$

En utilisant les densités D_μ et D_ν par rapport à la mesure γ , nous avons :

$$\begin{aligned}\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) D_\mu(x) \gamma(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) D_\nu(x) \gamma(dx) \right| \\ &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x) (D_\mu(x) - D_\nu(x)) \gamma(dx) \right|.\end{aligned}$$

Pour toute fonction borélienne f telle que $\|f\|_\infty \leq 1$, on a :

$$\left| \int_{\mathcal{X}} f(x) (D_\mu(x) - D_\nu(x)) \gamma(dx) \right| \leq \int_{\mathcal{X}} |f(x)| |D_\mu(x) - D_\nu(x)| \gamma(dx) \leq \int_{\mathcal{X}} |D_\mu(x) - D_\nu(x)| \gamma(dx).$$

En choisissant la fonction test $f(x) = \text{sgn}(D_\mu(x) - D_\nu(x))$, qui est borélienne et vérifie $\|f\|_\infty \leq 1$, l'intégrale devient :

$$\int_{\mathcal{X}} \text{sgn}(D_\mu(x) - D_\nu(x)) (D_\mu(x) - D_\nu(x)) \gamma(dx) = \int_{\mathcal{X}} |D_\mu(x) - D_\nu(x)| \gamma(dx).$$

Ainsi, le supremum est bien atteint pour cette fonction, ce qui prouve l'identité (*).

De plus, si $\tilde{\gamma}$ est une autre mesure de référence positive dominant μ et ν , les nouvelles densités $\tilde{D}_\mu = \frac{d\mu}{d\tilde{\gamma}}$ et $\tilde{D}_\nu = \frac{d\nu}{d\tilde{\gamma}}$ vérifient par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\int_{\mathcal{X}} |D_\mu(x) - D_\nu(x)| \gamma(dx) = \int_{\mathcal{X}} |\tilde{D}_\mu(x) - \tilde{D}_\nu(x)| \tilde{\gamma}(dx).$$

En effet, la relation de passage s'écrit $D_\mu(x) \gamma(dx) = \tilde{D}_\mu(x) \tilde{\gamma}(dx) = \mu(dx)$ et $D_\nu(x) \gamma(dx) = \tilde{D}_\nu(x) \tilde{\gamma}(dx) = \nu(dx)$, ce qui assure l'indépendance de la distance en variation totale vis-à-vis du choix de la mesure dominante. $\square$

Cette proposition est essentielle car la définition avec le supremum est élégante mais très difficile à calculer en pratique. Dès que deux mesures possèdent des densités par rapport à une mesure commune, la distance en variation totale se ramène simplement à la norme L^1 de la différence de leurs densités.

Corollaire 2.1. *Une conséquence de (*) est que pour deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathcal{X}$, on a $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = 2$ si et seulement si μ et ν sont mutuellement étrangères ($\mu \perp \nu$), et $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} < 2$ sinon.*

Démonstration. Soient μ et ν deux mesures étrangères ($\mu \perp \nu$). Il existe alors un ensemble borélien $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tel que $\mu(A) = 1$ et $\nu(A) = 0$. En posant la fonction test $f = 2\mathbf{1}_A - 1$, on a bien $\|f\|_\infty = 1$. Par la définition variationnelle de la variation totale :

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left| \int_{\mathcal{X}} g(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} g(x) \nu(dx) \right|.$$

Calculons les intégrales pour cette fonction spécifique f :

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) = \int_A 1 \mu(dx) + \int_{A^c} (-1) \mu(dx) = \mu(A) - \mu(A^c) = 1 - 0 = 1,$$

et pour la mesure ν :

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) = \int_A 1 \nu(dx) + \int_{A^c} (-1) \nu(dx) = \nu(A) - \nu(A^c) = 0 - 1 = -1.$$

On obtient donc :

$$\left| \int_{\mathcal{X}} f(x) \mu(dx) - \int_{\mathcal{X}} f(x) \nu(dx) \right| = |1 - (-1)| = 2,$$

d'où $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} \geq 2$.

D'autre part, pour toute fonction f vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\left| \int_{\mathcal{X}} f d\mu - \int_{\mathcal{X}} f d\nu \right| \leq \int_{\mathcal{X}} |f| d\mu + \int_{\mathcal{X}} |f| d\nu \leq \mu(\mathcal{X}) + \nu(\mathcal{X}) = 1 + 1 = 2,$$

ce qui garantit $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} \leq 2$. On a donc bien $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = 2$.

Montrons à présent que $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} < 2$ dès lors que μ et ν ne sont pas mutuellement étrangères.

Considérons la mesure positive finie $\gamma = \mu + \nu$. Les mesures μ et ν étant trivialement absolument continues par rapport à γ , le théorème de Radon-Nikodym assure l'existence de leurs densités respectives $D_\mu = \frac{d\mu}{d\gamma}$ et $D_\nu = \frac{d\nu}{d\gamma}$, avec $\int_{\mathcal{X}} D_\mu d\gamma = \mu(\mathcal{X}) = 1$ et $\int_{\mathcal{X}} D_\nu d\gamma = \nu(\mathcal{X}) = 1$.

En utilisant l'identité algébrique $|a - b| = a + b - 2(a \wedge b)$ pour tous réels a, b , la relation (*) donne :

$$\begin{aligned} \|\mu - \nu\|_{\text{TV}} &= \int_{\mathcal{X}} |D_\mu(x) - D_\nu(x)| \gamma(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X}} D_\mu(x) \gamma(dx) + \int_{\mathcal{X}} D_\nu(x) \gamma(dx) - 2 \int_{\mathcal{X}} (D_\mu(x) \wedge D_\nu(x)) \gamma(dx) \\ &= 2 \left(1 - \int_{\mathcal{X}} (D_\mu(x) \wedge D_\nu(x)) \gamma(dx) \right). \end{aligned}$$

Puisque μ et ν ne sont pas mutuellement étrangères, la mesure infimum $\mu \wedge \nu$ n'est pas la mesure nulle. Autrement dit, l'ensemble $A = \{x \in \mathcal{X} : D_\mu(x) > 0 \text{ et } D_\nu(x) > 0\}$ vérifie $\gamma(A) > 0$. Comme la fonction $D_\mu \wedge D_\nu$ est strictement positive sur A , son intégrale vérifie :

$$\int_{\mathcal{X}} (D_\mu(x) \wedge D_\nu(x)) \gamma(dx) = \int_A (D_\mu(x) \wedge D_\nu(x)) \gamma(dx) > 0.$$

On en conclut immédiatement que $\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} < 2$. □

Exemple 4 (Distance en variation totale entre deux lois gaussiennes réelles). Soient $\mu = \mathcal{N}(0, 1)$ et $\nu = \mathcal{N}(m, 1)$ avec $m \in \mathbb{R}$. En notant g_0 et g_m leurs densités respectives par rapport à la mesure de Lebesgue, l'égalité $g_0(x) = g_m(x)$ a lieu au seul point d'intersection $x = m/2$. Supposons sans perte de généralité $m \geq 0$: on a $g_0(x) \leq g_m(x)$ si et seulement si $x \geq m/2$. Par symétrie et par l'identité de la preuve du Corollaire 2.1, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}} (g_0(x) \wedge g_m(x)) dx = \int_{-\infty}^{m/2} g_m(x) dx + \int_{m/2}^{+\infty} g_0(x) dx = 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{m}{2} \right) \right),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On en déduit :

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = 2 \left(1 - \int_{\mathbb{R}} (g_0 \wedge g_m) dx \right) = 2 \left(2\Phi \left(\frac{|m|}{2} \right) - 1 \right).$$

Convergence faible

Cette sous-partie introduit rigoureusement la notion de convergence faible et certaines de ses propriétés.

Définition 2.5 (Tension). Soit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ une famille de mesures de probabilité sur un espace polonais $\mathcal{X}$. On dit que $\mathcal{M}$ est tendue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subseteq \mathcal{X}$ tel que $\mu(K) \geq 1 - \epsilon$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}$.

La tension est une notion essentielle pour notre sujet car en dimension infinie, la masse peut s'échapper vers l'infini. La notion de tension est donc une garantie de non-dispersion d'une famille de mesures : la masse totale du système (à ϵ près) reste confinée dans un sous-ensemble compact, donc fermé et précompact.

Proposition 2.3 (Théorème d'Ulam – Tension d'une mesure borélienne). Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ une mesure de probabilité sur un espace polonais $\mathcal{X}$. Alors le singleton $\{\mu\}$ est tendu.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$.

Étape 1 : Construction de l'ensemble K et contrôle de sa mesure.

L'espace métrique $\mathcal{X}$ étant séparable, il admet une partie dénombrable dense $(x_i)_{i \geq 1}$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{X}$ est recouvert par l'union des boules fermées de centre x_i et de rayon $1/n$:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B} \left(x_i, \frac{1}{n} \right).$$

Pour chaque $n \geq 1$ fixé, la suite d'ensembles $A_{n,N} = \bigcup_{i=1}^N \overline{B} (x_i, 1/n)$ est croissante en N et vérifie $\bigcup_{N=1}^{\infty} A_{n,N} = \mathcal{X}$. Par continuité croissante de la mesure de probabilité μ , on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_{n,N}) = \mu(\mathcal{X}) = 1.$$

Il existe donc un entier $I_n \geq 1$ tel que l'ensemble $K_n = A_{n,I_n} = \bigcup_{i=1}^{I_n} \overline{B}(x_i, 1/n)$ vérifie :

$$\mu(K_n) > 1 - \frac{\epsilon}{2^n}, \quad \text{soit} \quad \mu(K_n^c) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Définissons alors l'ensemble $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Par les lois de De Morgan et la sous-additivité dénombrable de μ , on a :

$$\mu(K^c) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

On en déduit que $\mu(K) = 1 - \mu(K^c) \geq 1 - \epsilon$.

Étape 2 : Compacité de K .

Montrons que K est compact.

- **K est fermé** : Pour tout $n \geq 1$, K_n est une union finie de boules fermées, donc fermé. En tant qu'intersection d'ensembles fermés, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est fermé dans $\mathcal{X}$.
- **K est précompact (totalement borné)** : Soit $\delta > 0$. Choisissons un entier $n \geq 1$ tel que $1/n < \delta$. Comme $K \subset K_n$, on a :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{I_n} \overline{B}\left(x_i, \frac{1}{n}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{I_n} B(x_i, \delta).$$

L'ensemble K peut ainsi être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon δ .

L'espace $\mathcal{X}$ étant polonais, il est complet. Or, dans un espace métrique complet, un sous-ensemble est compact si et seulement s'il est fermé et précompact. L'ensemble K est donc compact.

L'ensemble compact K vérifiant $\mu(K) \geq 1 - \epsilon$, le singleton $\{\mu\}$ est bien tendu. □

Théorème 2.1 (Prokhorov [14]). *Un sous-ensemble $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ est relativement compact pour la topologie de la convergence faible si et seulement s'il est tendu.*

Démonstration. Ce théorème sera admis car sa démonstration repose sur des arguments de compacité faible et de plongement métrisable dépassant le cadre direct de notre étude (on pourra consulter l'article original de Prokhorov [14]). □

La notion de tension est donc la clé de voûte de la compacité pour la convergence faible : elle permet d'extraire des sous-suites faiblement convergentes dès que l'on contrôle la non-dispersion de la masse à l'infini.

Comparaison et rôles des notions de convergence

Ces deux notions de convergence permettent de quantifier la proximité entre deux mesures de probabilité, bien qu'elles capturent des aspects géométriques et topologiques radicalement différents.

La variation totale impose une condition de proximité très forte, en comparant les probabilités sous-jacentes de manière uniforme sur tous les boréliens. Si deux mesures sont simplement translatées d'un faible écart spatial, leur distance en variation totale est maximale (égale à 2). Nous l'utiliserons principalement comme outil théorique, notamment pour établir des résultats de singularité ou de continuité absolue comme le théorème de Cameron-Martin.

La convergence faible propose une topologie bien plus souple, particulièrement adaptée aux espaces de dimension infinie. Elle permet de capturer la convergence globale des mesures sans imposer de contraintes locales strictes, en s'assurant que les espérances coïncident sur les fonctions tests continues bornées. C'est sur ce cadre que s'appuiera notre analyse de l'erreur faible des schémas numériques.

2.2 Théorie de la mesure Gaussienne

Cette partie est dédiée à l'étude des mesures gaussiennes sur les espaces de Banach.

Définitions et propriétés

Cette sous-partie se concentre sur la définition générale de la mesure gaussienne et sur certaines de ses propriétés fondamentales.

Définition 2.6 (Mesure gaussienne sur $\mathbb{R}$). *Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est dite gaussienne s'il existe $\sigma \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\ell \in \mathbb{R}$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(i\ell x) \mu(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\ell^2 + i\ell m\right).$$

De plus, si $m = 0$, cette mesure est dite centrée.

Le recours à la fonction caractéristique est ici essentiel car c'est l'outil dual naturel pour caractériser de manière unique une mesure sur un espace topologique. De plus, cette formulation inclut directement le cas dégénéré $\sigma = 0$, ce que l'expression classique de la densité gaussienne ne permet pas de faire sans un passage à la limite.

Définition 2.7. *Une mesure de probabilité gaussienne μ sur un espace de Banach séparable $\mathcal{B}$ est une mesure borélienne telle que la mesure image $\ell^*\mu$ soit une mesure de probabilité gaussienne sur $\mathbb{R}$ pour toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}^*$. Elle est dite centrée si $\ell^*\mu$ est centrée pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$. Ici, $\ell^*\mu$ désigne la mesure image de μ par ℓ , définie par $\ell^*\mu(A) = \mu(\ell^{-1}(A))$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$.*

Nous aurons besoin du lemme fondamental suivant qui établit la fermeture de l'ensemble des variables aléatoires réelles gaussiennes.

Lemme 2.1 (Fermeture des lois gaussiennes par convergence étroite). *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes, avec $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ ($m_n \in \mathbb{R}$, $\sigma_n \geq 0$).*

Si $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi (ou presque sûrement) vers une variable aléatoire X , alors :

1. *les suites $(m_n)_{n \geq 1}$ et $(\sigma_n^2)_{n \geq 1}$ convergent dans $\mathbb{R}$ vers des limites notées respectivement $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \geq 0$;*
2. *la variable limite X est gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (la loi de Dirac δ_m correspondant au cas dégénéré $\sigma^2 = 0$).*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, la fonction caractéristique de X_n s'écrit pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi_n(t) := \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \exp\left(itm_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2\right).$$

Puisque $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$, le théorème de continuité de Lévy garantit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où la fonction caractéristique limite ϕ_X est continue en 0 et vérifie $\phi_X(0) = 1$.

En évaluant le module, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|\phi_n(t)| = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\phi_X(t)|.$$

Par continuité de ϕ_X en 0, il existe $t_0 > 0$ tel que $|\phi_X(t_0)| > 0$. L'égalité ci-dessus impose alors :

$$\sigma_n^2 = -\frac{2}{t_0^2} \ln |\phi_n(t_0)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{2}{t_0^2} \ln |\phi_X(t_0)| =: \sigma^2 \in [0, +\infty[.$$

La suite des variances (σ_n^2) converge donc vers un réel fini $\sigma^2 \geq 0$. Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(itm_n) = \phi_n(t) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_X(t) \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

La suite (X_n) étant étroitement convergente, elle est tendue. Comme $\sup_n \sigma_n^2 < \infty$, si (m_n) n'était pas bornée, une sous-suite vérifiant $|m_{n_k}| \rightarrow \infty$ entraînerait par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que $\mathbb{P}(|X_{n_k}| \leq R) \rightarrow 0$ pour tout $R > 0$, contredisant la tension. La suite (m_n) est donc bornée. Dès lors, si m et m' sont deux valeurs d'adhérence de (m_n) , la convergence précédente impose $\exp(it(m - m')) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $m = m'$. La suite bornée (m_n) admettant une unique valeur d'adhérence, elle converge vers une limite finie $m \in \mathbb{R}$.

En passant à la limite dans $\phi_n(t)$, il vient :

$$\phi_X(t) = \exp\left(itm - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, ce qui conclut la preuve. □

Pour illustrer concrètement cette définition abstraite, cherchons à construire un vecteur aléatoire gaussien en empilant une infinité de variables gaussiennes réelles indépendantes. La proposition suivante fournit un exemple fondamental sur l'espace de Hilbert ℓ^2 et met en évidence la contrainte de sommabilité indispensable pour que l'objet aléatoire résultant ait une norme finie presque sûrement.

Proposition 2.4. *Soit $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. La loi de $(a_n \gamma_n)_{n \geq 0}$ définit une mesure gaussienne sur ℓ^2 si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.*

Démonstration. Supposons que la loi de $X = (a_n \gamma_n)_{n \geq 0}$ définisse une mesure de probabilité sur ℓ^2 . Alors le vecteur aléatoire X appartient presque sûrement à ℓ^2 , ce qui signifie que :

$$\|X\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \gamma_n^2 < +\infty \quad \text{presque sûrement.}$$

Montrons par contraposée que cela impose $\sum_{n \geq 0} a_n^2 < \infty$.

Supposons au contraire que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. Pour chaque $n \geq 0$, un calcul gaussien direct donne la transformée de Laplace :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} a_n^2 \gamma_n^2 \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{1+a_n^2}{2} x^2 \right) dx = \frac{1}{\sqrt{1+a_n^2}}.$$

Par indépendance des variables aléatoires $(\gamma_n)_{n \geq 0}$, nous avons pour tout entier $N \geq 0$:

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n^2 \gamma_n^2 \right) \right] = \prod_{n=0}^N \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} a_n^2 \gamma_n^2 \right) \right] = \prod_{n=0}^N \frac{1}{\sqrt{1+a_n^2}}.$$

La série à termes positifs $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ divergeant vers $+\infty$, le produit infini diverge vers 0 (en effet, $\prod_{n=0}^N (1+a_n^2) \geq 1 + \sum_{n=0}^N a_n^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$).

D'autre part, la suite $\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n^2 \gamma_n^2 \right)$ est décroissante et bornée par 1. Par le théorème de convergence monotone (ou dominée), on peut intervertir la limite et l'espérance :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \|X\|_{\ell^2}^2 \right) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N a_n^2 \gamma_n^2 \right) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^N \frac{1}{\sqrt{1+a_n^2}} = 0.$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, l'annulation de l'espérance impose que $\exp \left(-\frac{1}{2} \|X\|_{\ell^2}^2 \right) = 0$ presque sûrement, d'où :

$$\|X\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \gamma_n^2 = +\infty \quad \text{presque sûrement.}$$

Ceci contredit le fait que $X \in \ell^2$ presque sûrement. On en déduit donc nécessairement que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Réciproquement, supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Étape 1 : Le vecteur aléatoire X est bien défini dans ℓ^2 .

Considérons le vecteur aléatoire $X = (a_n \gamma_n)_{n \geq 0}$. Par le théorème de Fubini-Tonelli pour les séries à termes positifs, on a :

$$\mathbb{E} [\|X\|_{\ell^2}^2] = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \gamma_n^2 \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \mathbb{E} [\gamma_n^2] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Une variable aléatoire positive d'espérance finie étant presque sûrement finie, il s'ensuit que $\|X\|_{\ell^2} < \infty$ presque sûrement. Le vecteur X prend donc presque sûrement ses valeurs dans l'espace de Hilbert séparable ℓ^2 , et sa loi définit bien une mesure de probabilité borélienne μ sur ℓ^2 .

Étape 2 : La mesure μ est gaussienne.

Soit $\ell \in (\ell^2)^*$. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe une suite $y = (y_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$ telle que pour tout $x \in \ell^2$, $\ell(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x_n$.

Puisque $X \in \ell^2$ presque sûrement, l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que la série définissant la variable aléatoire réelle $\ell(X)$ converge absolument presque sûrement :

$$\ell(X) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n a_n \gamma_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \quad \text{avec} \quad S_N = \sum_{n=0}^N y_n a_n \gamma_n.$$

Pour tout entier $N \geq 0$, la somme partielle S_N est une combinaison linéaire finie de variables aléatoires gaussiennes réelles indépendantes et centrées. C'est donc une variable gaussienne centrée, de variance :

$$\sigma_N^2 = \text{Var}(S_N) = \sum_{n=0}^N y_n^2 a_n^2.$$

Puisque $S_N \rightarrow \ell(X)$ presque sûrement lorsque $N \rightarrow \infty$, la suite converge *a fortiori* en loi. D'après le Lemme 2.1, la limite $\ell(X)$ est une variable aléatoire gaussienne réelle. La variable $\ell(X)$ étant gaussienne pour toute forme linéaire continue $\ell \in (\ell^2)^*$, la mesure μ est bien une mesure gaussienne sur ℓ^2 d'après la Définition 2.7. $\square$

La définition d'une mesure gaussienne sur un espace de Banach repose exclusivement sur ses projections scalaires $\ell^* \mu$. Afin d'établir que ces projections de dimension finie caractérisent de manière unique la mesure sur la tribu borélienne tout entière, il est nécessaire d'introduire la classe d'ensembles qu'elles engendrent naturellement.

Définition 2.8 (Tribu cylindrique). *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Un sous-ensemble $A \subset \mathcal{B}$ est appelé un ensemble cylindrique s'il existe un entier $n \geq 1$, une application linéaire continue $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et un borélien $\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tels que $A = T^{-1}(\tilde{A})$.*

L'ensemble de ces cylindres forme une algèbre, notée $\text{Cyl}(\mathcal{B})$. La tribu engendrée par cette algèbre est appelée la tribu cylindrique, notée $\mathcal{E}(\mathcal{B}) = \sigma(\text{Cyl}(\mathcal{B}))$.

Théorème 2.2 (Coïncidence des tribus borélienne et cylindrique). *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach séparable. La tribu cylindrique coïncide exactement avec la tribu borélienne :*

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathcal{B}).$$

Démonstration. Par continuité des formes linéaires, tout ensemble cylindrique est un borélien, d'où $\mathcal{E}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{B})$.

Montrons l'inclusion réciproque. L'espace $\mathcal{B}$ étant séparable, tout ouvert s'écrit comme une réunion dénombrable de boules fermées. Il suffit donc d'établir que toute boule fermée appartient à $\mathcal{E}(\mathcal{B})$, ce qui se ramène par translation et homothétie à montrer que $\overline{B}(0, 1) \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dénombrable dense sur la sphère unité $\{x \in \mathcal{B} : \|x\| = 1\}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe pour chaque n une forme linéaire continue $\ell_n \in \mathcal{B}^*$ telle que $\|\ell_n\|_{\mathcal{B}^*} = 1$ et $\ell_n(x_n) = 1$. Considérons l'élément de la tribu cylindrique :

$$K = \bigcap_{n \geq 0} \{x \in \mathcal{B} : |\ell_n(x)| \leq 1\} \in \mathcal{E}(\mathcal{B}).$$

L'inclusion $\overline{B}(0, 1) \subset K$ est immédiate car $|\ell_n(x)| \leq \|\ell_n\| \|x\| \leq 1$ pour tout $x \in \overline{B}(0, 1)$.

Réciproquement, si $y \in \mathcal{B}$ vérifie $\|y\| > 1$, considérons le vecteur unitaire $u = y/\|y\|$. Par densité de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ sur la sphère unité, il existe un indice n tel que $\|x_n - u\| < 1 - 1/\|y\|$. On en déduit :

$$|\ell_n(y)| = \|y\| |\ell_n(u)| \geq \|y\| (\ell_n(x_n) - \|\ell_n\|_{\mathcal{B}^*} \|u - x_n\|) > \|y\| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\|y\|}\right)\right) = 1,$$

ce qui prouve que $y \notin K$. Par conséquent, $\overline{B}(0, 1) = K \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$, ce qui prouve $\mathcal{B}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{B})$. $\square$

Corollaire 2.2 (Caractérisation par les formes linéaires). *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach séparable et soient μ et ν deux mesures de probabilité boréliennes sur $\mathcal{B}$. Si $\ell^* \mu = \ell^* \nu$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$, alors $\mu = \nu$.*

Démonstration. Soit $A = T^{-1}(\tilde{A}) \in \text{Cyl}(\mathcal{B})$ un cylindre avec $T = (\ell_1, \dots, \ell_n)$. Par le théorème de Cramér-Wold, l'hypothèse assure que les lois images $T^* \mu$ et $T^* \nu$ coïncident sur $\mathbb{R}^n$, d'où $\mu(A) = \nu(A)$.

Les mesures coïncident donc sur l'algèbre $\text{Cyl}(\mathcal{B})$. Comme cette algèbre est stable par intersection finie et engendre la tribu cylindrique, le lemme de classe monotone (ou théorème π - λ de Dynkin) assure que $\mu = \nu$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{B})$. D'après le Théorème 2.2, $\mathcal{E}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathcal{B})$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Dans la suite de cette étude, on va considérer uniquement des mesures gaussiennes centrées. En effet, l'étude d'une mesure gaussienne non centrée peut systématiquement se ramener au cas d'une mesure centrée par simple translation.

Définition 2.9 (Opérateur de covariance). *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach séparable muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{B})$, et soit $\mathcal{B}^*$ son espace dual topologique muni de la norme duale. Soit μ une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{B}$.*

Pour toutes formes linéaires $\ell, \ell' \in \mathcal{B}^*$, les applications $x \mapsto \ell(x)$ et $x \mapsto \ell'(x)$ sont continues, donc $\mathcal{B}(\mathcal{B})$ -mesurables. On définit l'opérateur de covariance $C_\mu : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* \rightarrow \mathbb{R}$ associé à μ par :

$$C_\mu(\ell, \ell') = \int_{\mathcal{B}} \ell(x) \ell'(x) \mu(dx).$$

Proposition 2.5. *L'opérateur de covariance C_μ est une forme bilinéaire symétrique et semi-définie positive sur $\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*$.*

Démonstration. La bilinéarité de C_μ découle directement de la linéarité des formes ℓ et ℓ' ainsi que de la linéarité de l'intégrale. La symétrie est immédiate par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Enfin, pour toute forme linéaire $\ell \in \mathcal{B}^*$, on a :

$$C_\mu(\ell, \ell) = \int_{\mathcal{B}} \ell(x)^2 \mu(dx) \geq 0.$$

□

En dimension finie, une loi normale est classiquement identifiée par sa fonction caractéristique $t \mapsto \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$. En l'absence de mesure de Lebesgue en dimension infinie, la transformée de Fourier (ou fonction caractéristique) $\hat{\mu}(\ell) = \int_{\mathcal{B}} e^{i\ell(x)} \mu(dx)$ constitue l'outil analytique privilégié pour décrire globalement une mesure sur $\mathcal{B}$. La proposition suivante établit que pour une mesure gaussienne, cette fonctionnelle est entièrement caractérisée par la forme quadratique associée à l'opérateur de covariance.

Proposition 2.6. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach séparable. Une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}$ est gaussienne centrée si et seulement s'il existe une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive $K : \mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la transformée de Fourier de μ soit donnée, pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$, par :*

$$\hat{\mu}(\ell) := \int_{\mathcal{B}} \exp(i\ell(x)) \mu(dx) = \exp\left(-\frac{1}{2}K(\ell, \ell)\right).$$

Dans ce cas, la forme K coïncide nécessairement avec l'opérateur de covariance C_μ de μ , c'est-à-dire que pour tous $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{B}^*$, $K(\ell_1, \ell_2) = C_\mu(\ell_1, \ell_2) = \int_{\mathcal{B}} \ell_1(x) \ell_2(x) \mu(dx)$.

Démonstration. Soit μ une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{B}$. Par la Définition 2.7, pour toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}^*$, la loi image $\ell^* \mu$ est une mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(it y) (\ell^* \mu)(dy) = \exp\left(-\frac{t^2 \sigma_\ell^2}{2}\right),$$

où σ_ℓ^2 désigne la variance de la loi réelle $\ell^* \mu$. Par définition de la mesure image et en évaluant en $t = 1$, on obtient :

$$\hat{\mu}(\ell) = \int_{\mathcal{B}} \exp(i\ell(x)) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \exp(iy) (\ell^* \mu)(dy) = \exp\left(-\frac{\sigma_\ell^2}{2}\right).$$

Or, en appliquant à nouveau la définition de la mesure image, la variance s'exprime par :

$$\sigma_\ell^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 (\ell^* \mu)(dy) = \int_{\mathcal{B}} \ell(x)^2 \mu(dx) = C_\mu(\ell, \ell),$$

d'où l'identité :

$$\hat{\mu}(\ell) = \exp\left(-\frac{1}{2}C_\mu(\ell, \ell)\right),$$

ce qui prouve l'implication directe en posant $K = C_\mu$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive K telle que $\hat{\mu}(\ell) = \exp\left(-\frac{1}{2}K(\ell, \ell)\right)$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$.

Soient $\ell \in \mathcal{B}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Par définition de la mesure image, la fonction caractéristique de la variable réelle $\ell(X)$ (de loi $\ell^*\mu$) s'exprime pour tout t par :

$$\phi_{\ell^*\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(ity) (\ell^*\mu)(dy) = \int_{\mathcal{B}} \exp(i(t\ell)(x)) \mu(dx) = \hat{\mu}(t\ell).$$

En évaluant la formule de l'hypothèse au point $t\ell \in \mathcal{B}^*$ et par bilinéarité de K , il vient :

$$\phi_{\ell^*\mu}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}K(t\ell, t\ell)\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}K(\ell, \ell)\right).$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi gaussienne réelle centrée $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ de variance $\sigma^2 = K(\ell, \ell) \geq 0$.

La projection scalaire $\ell^*\mu$ étant une mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$ pour toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}^*$, la mesure μ est bien une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{B}$ au sens de la Définition 2.7. De plus, la variance d'une loi gaussienne réelle coïncidant avec son moment d'ordre deux, on a pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$:

$$C_\mu(\ell, \ell) = \int_{\mathcal{B}} \ell(x)^2 \mu(dx) = \sigma^2 = K(\ell, \ell),$$

ce qui identifie K à C_μ sur la diagonale, puis sur $\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*$ par polarisation. □

Proposition 2.7. *Soient μ et ν deux mesures de probabilité quelconques sur un espace de Banach séparable $\mathcal{B}$. Si $\hat{\mu}(\ell) = \hat{\nu}(\ell)$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$, alors $\mu = \nu$.*

En pratique, cette proposition dit que les mesures de probabilité sur les espaces de Banach séparables sont entièrement déterminées par leur transformée de Fourier.

Démonstration. Considérons d'abord le cas particulier $\mathcal{B} = \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Puisque f est lisse à support compact, elle appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ce qui garantit que sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est à décroissance rapide, et en particulier $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. La formule d'inversion de Fourier s'applique donc ponctuellement :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) \exp(-ikx) dk, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme $|\hat{f}(k) \exp(-ikx)| = |\hat{f}(k)| \in L^1(\mathbb{R})$ et que μ est une mesure de probabilité finie ($\mu(\mathbb{R}) = 1$), l'intégrabilité dominée $|\hat{f}(k)| \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, dk \otimes \mu)$ est vérifiée. Le théorème de Fubini autorise alors l'interversion :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) \exp(-ikx) dk \right) \mu(dx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx) \mu(dx) \right) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) \hat{\mu}(-k) dk. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\hat{\mu}(k) = \hat{\nu}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$, ce qui implique immédiatement :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \nu(dx), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}).$$

L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ étant dense dans l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, cette égalité caractérise uniquement les mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$, d'où $\mu = \nu$ sur $\mathbb{R}$.

Le cas général sur l'espace de Banach séparable $\mathcal{B}$ découle alors directement de ce résultat unidimensionnel : pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$, la fonction caractéristique de $\ell^*\mu$ est $t \mapsto \hat{\mu}(t\ell) = \hat{\nu}(t\ell)$, d'où $\ell^*\mu = \ell^*\nu$ sur $\mathbb{R}$. Par le Corollaire 2.2, on en conclut que $\mu = \nu$. □

Corollaire 2.3 (Unicité par l'opérateur de covariance). *Soient μ et ν deux mesures gaussiennes centrées sur un espace de Banach séparable $\mathcal{B}$. Si $C_\mu = C_\nu$ (c'est-à-dire si $C_\mu(\ell, \ell) = C_\nu(\ell, \ell)$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$), alors :*

$$\mu = \nu.$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.6, la transformée de Fourier d'une mesure gaussienne centrée est entièrement déterminée par la forme quadratique associée à sa covariance. L'égalité $C_\mu = C_\nu$ entraîne donc :

$$\hat{\mu}(\ell) = \exp\left(-\frac{1}{2}C_\mu(\ell, \ell)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}C_\nu(\ell, \ell)\right) = \hat{\nu}(\ell) \quad \text{pour tout } \ell \in \mathcal{B}^*.$$

L'égalité des transformées de Fourier sur $\mathcal{B}^*$ implique alors $\mu = \nu$ d'après la Proposition 2.7. $\square$

En dimension finie, la loi conjointe de deux vecteurs gaussiens indépendants et identiquement distribués possède une densité à symétrie sphérique, invariante par rotation. La proposition suivante montre que cette propriété de symétrie géométrique persiste en dimension infinie sur l'espace produit $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

Cette invariance — en particulier pour l'angle $\theta = \pi/4$, qui transforme le couple (x, y) en $(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}})$ — constitue le moteur géométrique de la démonstration du théorème de Fernique, dont dépend l'intégrabilité exponentielle de la norme.

Proposition 2.8. *Soit μ une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{B}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la transformation orthogonale $\mathcal{R}_\theta : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B}^2$ par :*

$$\mathcal{R}_\theta(x, y) = (x \sin \theta + y \cos \theta, x \cos \theta - y \sin \theta).$$

Alors, la mesure produit $\mu \otimes \mu$ est invariante sous cette transformation, c'est-à-dire que la mesure image vérifie :

$$\mathcal{R}_\theta^*(\mu \otimes \mu) = \mu \otimes \mu.$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.7, une mesure de probabilité sur l'espace de Banach séparable $\mathcal{B}^2$ est entièrement déterminée par sa transformée de Fourier. Il suffit donc de vérifier que pour tout couple $(\ell_1, \ell_2) \in (\mathcal{B}^*)^2$, on a :

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta^*(\mu \otimes \mu)}(\ell_1, \ell_2) = \widehat{\mu \otimes \mu}(\ell_1, \ell_2).$$

Par découplage de la mesure produit et d'après la Proposition 2.6, la transformée de Fourier de $\mu \otimes \mu$ s'écrit :

$$\widehat{\mu \otimes \mu}(\ell_1, \ell_2) = \hat{\mu}(\ell_1)\hat{\mu}(\ell_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}[C_\mu(\ell_1, \ell_1) + C_\mu(\ell_2, \ell_2)]\right).$$

Calculons à présent la transformée de Fourier de la mesure image. Par définition de la mesure image et par linéarité des formes ℓ_1 et ℓ_2 , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta^*(\widehat{\mu \otimes \mu})(\ell_1, \ell_2) &= \int_{\mathcal{B}^2} \exp\left(i(\ell_1(x') + \ell_2(y'))\right) (\mathcal{R}_\theta^*(\mu \otimes \mu))(dx', dy') \\ &= \int_{\mathcal{B}^2} \exp\left(i(\ell_1(x \sin \theta + y \cos \theta) + \ell_2(x \cos \theta - y \sin \theta))\right) (\mu \otimes \mu)(dx, dy) \\ &= \int_{\mathcal{B}^2} \exp\left(i(L(x) + L'(y))\right) (\mu \otimes \mu)(dx, dy), \end{aligned}$$

en posant les formes linéaires continues $L, L' \in \mathcal{B}^*$ définies par :

$$L = \ell_1 \sin \theta + \ell_2 \cos \theta \quad \text{et} \quad L' = \ell_1 \cos \theta - \ell_2 \sin \theta.$$

Cette intégrale coïncide avec l'évaluation $\widehat{\mu \otimes \mu}(L, L')$. Elle vaut donc :

$$\mathcal{R}_\theta^*(\widehat{\mu \otimes \mu})(\ell_1, \ell_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}[C_\mu(L, L) + C_\mu(L', L')]\right).$$

Par bilinéarité et symétrie de l'opérateur de covariance C_μ , développons chacun des deux termes :

$$\begin{aligned} C_\mu(L, L) &= \sin^2 \theta C_\mu(\ell_1, \ell_1) + \cos^2 \theta C_\mu(\ell_2, \ell_2) + 2 \sin \theta \cos \theta C_\mu(\ell_1, \ell_2), \\ C_\mu(L', L') &= \cos^2 \theta C_\mu(\ell_1, \ell_1) + \sin^2 \theta C_\mu(\ell_2, \ell_2) - 2 \sin \theta \cos \theta C_\mu(\ell_1, \ell_2). \end{aligned}$$

En sommant ces deux lignes, les termes croisés s'annulent. L'identité fondamentale $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ donne alors :

$$C_\mu(L, L) + C_\mu(L', L') = C_\mu(\ell_1, \ell_1) + C_\mu(\ell_2, \ell_2).$$

On en déduit que $\mathcal{R}_\theta^*(\widehat{\mu \otimes \mu})(\ell_1, \ell_2) = \widehat{\mu \otimes \mu}(\ell_1, \ell_2)$ pour tout $(\ell_1, \ell_2) \in (\mathcal{B}^*)^2$, d'où $\mathcal{R}_\theta^*(\mu \otimes \mu) = \mu \otimes \mu$. $\square$

Comportement asymptotique de la norme et intégrabilité exponentielle

Dans cette sous-partie, nous allons discuter des conditions nécessaires pour que l'opérateur de covariance soit borné et pour que $\exp(\alpha\|x\|^2)$ soit intégrable. De cela découleront des propriétés fondamentales sur le comportement asymptotique de la norme d'une mesure gaussienne.

Théorème 2.3 (Fernique, 1970 [6]). *Soit μ une mesure de probabilité sur un espace de Banach séparable $\mathcal{B}$. Si la mesure produit $\mu \otimes \mu$ est invariante par la rotation d'angle $\theta = \pi/4$ (au sens de la proposition 2.8), alors il existe un paramètre $\alpha > 0$ tel que :*

$$\int_{\mathcal{B}} \exp(\alpha\|x\|^2) \mu(dx) < \infty.$$

Démonstration. Soient $t, \tau > 0$ deux réels, on a par propriété de la mesure produit $\mu \otimes \mu$ que :

$$\mu(\|x\| \leq \tau) \mu(\|x\| > t) = \int_{\{\|x\| \leq \tau\}} \int_{\{\|y\| > t\}} \mu(dx) \mu(dy).$$

De plus, considérons le changement de variable défini par la transformation orthogonale d'angle $\theta = \pi/4$ notée $\mathcal{R}_{\pi/4} : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B}^2$ et donnée par :

$$\mathcal{R}_{\pi/4}(x, y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right).$$

Par l'invariance par rotation (Proposition 2.8), la mesure image vérifie $\mathcal{R}_{\pi/4}^*(\mu \otimes \mu) = \mu \otimes \mu$. En appliquant ce changement de variable, l'intégrale s'exprime par :

$$\mu(\|x\| \leq \tau) \mu(\|x\| > t) = \int_{\{\|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\| \leq \tau\}} \int_{\{\|\frac{x-y}{\sqrt{2}}\| > t\}} \mu(dx) \mu(dy).$$

Pour analyser ce domaine, introduisons les variables transformées $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ et $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, qui satisfont les identités géométriques inversées :

$$x = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}.$$

De plus, on a les relations directes :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} + \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right).$$

D'où, par inégalité triangulaire inversée, si un couple (x, y) appartient au domaine d'intégration tourné (où $\|u\| \leq \tau$ et $\|v\| > t$), on obtient :

$$\left\| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right\| - \left\| \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right\| > t - \tau,$$

ce qui implique par l'inégalité triangulaire sur les expressions de x et y :

$$\|x\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left\| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right\| - \left\| \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right\| \right) > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}},$$

$$\|y\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left\| \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right\| - \left\| \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right\| \right) > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}.$$

Puis, par monotonie de l'intégrale et par le théorème de Fubini, on obtient :

$$\mu(\|x\| \leq \tau) \mu(\|x\| > t) \leq \int_{\{\|x\| > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\}} \int_{\{\|y\| > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\}} \mu(dx) \mu(dy) = \mu \left(\|x\| > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

Puisque $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathcal{B} : \|x\| \leq k\}$, la continuité croissante de la mesure de probabilité μ assure que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\|x\| \leq k) = 1$. Il existe donc un réel $\tau > 0$ tel que :

$$\mu(\|x\| \leq \tau) \geq \frac{3}{4}, \quad \text{soit} \quad \mu(\|x\| > \tau) \leq \frac{1}{4}.$$

Posons $t_0 = \tau$ et définissons par récurrence $t_{n+1} = \sqrt{2}t_n + \tau$ pour tout $n \geq 0$. Comme $\frac{t_{n+1}-\tau}{\sqrt{2}} = t_n$, l'inégalité précédente donne :

$$\mu(\|x\| > t_{n+1}) \leq \frac{\mu(\|x\| > t_n)^2}{\mu(\|x\| \leq \tau)} \leq \frac{4}{3}\mu(\|x\| > t_n)^2.$$

En posant $y_n = \frac{4}{3}\mu(\|x\| > t_n)$, la relation devient $y_{n+1} \leq y_n^2$. Comme $y_0 \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$, une récurrence immédiate fournit :

$$\mu(\|x\| > t_n) \leq \frac{3}{4}y_0^{2^n} \leq 3^{-2^n}.$$

Par ailleurs, la résolution de la récurrence affine donne $t_n = \tau((\sqrt{2})^n + \sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt{2})^k) \leq C\tau 2^{n/2}$ pour une constante finie $C > 0$ (avec $C = 2 + \sqrt{2} \leq 4$).

Soit maintenant $t \geq \tau$. La suite (t_n) étant strictement croissante et divergeant vers $+\infty$, il existe un unique entier $n \geq 0$ tel que $t_n \leq t < t_{n+1}$. L'inégalité $t < t_{n+1} \leq C\tau 2^{(n+1)/2} = C\sqrt{2}\tau 2^{n/2}$ implique $2^n \geq \frac{t^2}{2C^2\tau^2}$. Par décroissance de la mesure, on obtient :

$$\mu(\|x\| > t) \leq \mu(\|x\| > t_n) \leq 3^{-2^n} \leq \exp\left(-\frac{\ln 3}{2C^2\tau^2}t^2\right).$$

Il existe donc une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $t \geq \tau$:

$$\mu(\|x\| > t) \leq \exp(-2\beta t^2).$$

Pour conclure, exprimons l'espérance de la fonctionnelle exponentielle par la formule de Fubini (représentation en couches) pour $\alpha = \beta$:

$$\int_{\mathcal{B}} \exp(\alpha\|x\|^2) \mu(dx) = 1 + \int_0^\infty 2\alpha t \exp(\alpha t^2) \mu(\|x\| > t) dt.$$

En scindant cette intégrale en deux :

— Sur $[0, \tau]$, en majorant trivialement $\mu(\|x\| > t) \leq 1$:

$$\int_0^\tau 2\alpha t \exp(\alpha t^2) dt = \exp(\alpha\tau^2) - 1.$$

— Sur $[\tau, \infty[$, en injectant la décroissance gaussienne $\mu(\|x\| > t) \leq \exp(-2\alpha t^2)$:

$$\int_\tau^\infty 2\alpha t \exp(\alpha t^2) \exp(-2\alpha t^2) dt = \int_\tau^\infty 2\alpha t \exp(-\alpha t^2) dt = \exp(-\alpha\tau^2) \leq 1.$$

La somme de ces deux termes étant finie ($\leq \exp(\alpha\tau^2) < \infty$), on en déduit l'existence d'un paramètre $\alpha > 0$ pour lequel l'intégrale est finie. $\square$

Remarque 2. Ce théorème est fondamental car, en dimension infinie, la norme $\|x\|$ pourrait a priori diverger. Le résultat de Fernique assure que pour toute mesure gaussienne, la norme admet des moments finis à tout ordre et vérifie une intégrabilité exponentielle au carré. De plus, il garantit que l'opérateur de covariance est borné (Définition 2.9), ce qui assoit la cohérence du bruit.

Corollaire 2.4. Il existe une constante $M < \infty$ telle que $C_\mu(\ell, \ell') \leq M\|\ell\|_{\mathcal{B}^*}\|\ell'\|_{\mathcal{B}^*}$ pour tous $\ell, \ell' \in \mathcal{B}^*$. De plus, l'opérateur $\hat{C}_\mu : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}^{**}$ défini par $\hat{C}_\mu(\ell)(\ell') = C_\mu(\ell, \ell')$ se restreint en un opérateur linéaire continu de $\mathcal{B}^*$ dans $\mathcal{B}$.

Démonstration. Étape 1 : Majoration de l'opérateur de covariance.

Soient $\ell, \ell' \in \mathcal{B}^*$. En utilisant l'inégalité $|\ell(x)| \leq \|\ell\|_{\mathcal{B}^*}\|x\|_{\mathcal{B}}$ et par monotonie de l'intégrale, on a :

$$|C_\mu(\ell, \ell')| \leq \int_{\mathcal{B}} |\ell(x)\ell'(x)| \mu(dx) \leq \|\ell\|_{\mathcal{B}^*}\|\ell'\|_{\mathcal{B}^*} \int_{\mathcal{B}} \|x\|_{\mathcal{B}}^2 \mu(dx).$$

D'après le théorème de Fernique, la constante $M = \int_{\mathcal{B}} \|x\|_{\mathcal{B}}^2 \mu(dx)$ est finie. On en déduit immédiatement la première inégalité :

$$C_\mu(\ell, \ell') \leq M\|\ell\|_{\mathcal{B}^*}\|\ell'\|_{\mathcal{B}^*}.$$

Étape 2 : Restriction et continuité de $\hat{C}_\mu$ dans $\mathcal{B}$.

A priori, l'application $\hat{C}_\mu(\ell) : \ell' \mapsto C_\mu(\ell, \ell')$ définit un élément du bidual $\mathcal{B}^{**}$. Montrons qu'il s'identifie en réalité à un vecteur de $\mathcal{B}$.

Soit $\ell \in \mathcal{B}^*$. L'application $x \mapsto x\ell(x)$ est continue sur l'espace de Banach séparable $\mathcal{B}$, donc fortement mesurable (au sens de Pettis). De plus, elle est intégrable au sens de Bochner car :

$$\int_{\mathcal{B}} \|x\ell(x)\|_{\mathcal{B}} \mu(dx) \leq \|\ell\|_{\mathcal{B}^*} \int_{\mathcal{B}} \|x\|_{\mathcal{B}}^2 \mu(dx) = M \|\ell\|_{\mathcal{B}^*} < \infty.$$

L'intégrale de Bochner $I_\ell = \int_{\mathcal{B}} x\ell(x) \mu(dx)$ définit donc un élément bien déterminé de $\mathcal{B}$. Pour toute forme linéaire continue $\ell' \in \mathcal{B}^*$, la commutation de ℓ' avec l'intégrale de Bochner donne :

$$\ell'(I_\ell) = \ell' \left(\int_{\mathcal{B}} x\ell(x) \mu(dx) \right) = \int_{\mathcal{B}} \ell'(x)\ell(x) \mu(dx) = C_\mu(\ell, \ell') = \hat{C}_\mu(\ell)(\ell').$$

L'élément $\hat{C}_\mu(\ell) \in \mathcal{B}^{**}$ coïncide donc avec l'image canonique du vecteur $I_\ell \in \mathcal{B}$.

Enfin, l'inégalité triangulaire pour l'intégrale de Bochner fournit le contrôle de la norme dans $\mathcal{B}$:

$$\|\hat{C}_\mu(\ell)\|_{\mathcal{B}} = \|I_\ell\|_{\mathcal{B}} \leq \int_{\mathcal{B}} \|x\ell(x)\|_{\mathcal{B}} \mu(dx) \leq M \|\ell\|_{\mathcal{B}^*}.$$

L'opérateur linéaire $\hat{C}_\mu : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}$ est borné, ce qui démontre sa continuité et achève la preuve. $\square$

Grâce à la continuité de l'opérateur restreint démontrée ci-dessus, nous identifierons désormais l'opérateur de covariance $\hat{C}_\mu$ comme une application de $\mathcal{B}^*$ dans $\mathcal{B}$. Le théorème de Fernique établit l'intégrabilité exponentielle de la norme, mais en pratique, l'analyse fine des trajectoires nécessite de contrôler des moments d'ordre arbitrairement élevé L^p (ce qui sera indispensable lors de l'application du critère de continuité de Kolmogorov, Théorème 4.8). La proposition suivante démontre une propriété fondamentale des mesures gaussiennes : une fois renormalisés par leur premier moment, tous leurs moments d'ordre supérieur sont universellement équivalents et contrôlés par des constantes indépendantes de l'espace considéré.

Proposition 2.9 (Équivalence des moments gaussiens). *Il existe deux constantes universelles $\alpha > 0$ et $K > 0$ telles que, pour tout espace de Banach séparable $\mathcal{B}$ et toute mesure gaussienne centrée non dégénérée $\mu \neq \delta_0$ sur $\mathcal{B}$, en notant son premier moment :*

$$M = \int_{\mathcal{B}} \|x\| \mu(dx) \in (0, +\infty),$$

on a la majoration exponentielle normalisée :

$$\int_{\mathcal{B}} \exp\left(\alpha \frac{\|x\|^2}{M^2}\right) \mu(dx) \leq K.$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 1$, les moments d'ordre pair vérifient :

$$\int_{\mathcal{B}} \|x\|^{2n} \mu(dx) \leq n! K \alpha^{-n} M^{2n}.$$

Par conséquent, pour tout exposant $p \geq 1$, il existe une constante $C_p > 0$ dépendant uniquement de p telle que, pour toute mesure gaussienne centrée μ sur $\mathcal{B}$ (dégénérée ou non) :

$$\left(\int_{\mathcal{B}} \|x\|^p \mu(dx) \right)^{1/p} \leq C_p \int_{\mathcal{B}} \|x\| \mu(dx).$$

Démonstration. Si $\mu = \delta_0$, le premier moment $M = 0$ s'annule et l'inégalité sur les moments L^p est trivialement vérifiée avec $0 \leq 0$. On suppose désormais $\mu \neq \delta_0$, ce qui garantit $M > 0$.

Étape 1 : Choix du seuil τ via l'inégalité de Markov.

Par l'inégalité de Markov, on a :

$$\mu(\|x\| > 4M) \leq \frac{1}{4M} \int_{\mathcal{B}} \|x\| \mu(dx) = \frac{1}{4M} \cdot M = \frac{1}{4}.$$

Par passage au complémentaire, $\mu(\|x\| \leq 4M) \geq \frac{3}{4}$. On peut donc choisir le paramètre $\tau = 4M$ dans la démonstration du théorème de Fernique. L'estimation de queue établie précédemment assure alors l'existence d'une constante universelle $\beta > 0$ telle que pour tout $t \geq 4M$:

$$\mu(\|x\| > t) \leq \exp\left(-2\beta \frac{t^2}{(4M)^2}\right) = \exp\left(-2\alpha \frac{t^2}{M^2}\right),$$

en posant la constante universelle $\alpha = \frac{\beta}{16} > 0$.

Étape 2 : Majoration de la fonctionnelle exponentielle.

En appliquant la formule de représentation en couches (Fubini) à la variable aléatoire positive $\|x\|/M$, il vient :

$$\int_{\mathcal{B}} \exp\left(\alpha \frac{\|x\|^2}{M^2}\right) \mu(dx) = 1 + \int_0^\infty 2\alpha u \exp(\alpha u^2) \mu\left(\frac{\|x\|}{M} > u\right) du.$$

En découpant cette intégrale au seuil $u = 4$:

— Pour $u \in [0, 4]$, on majore trivialement $\mu(\|x\|/M > u) \leq 1$:

$$\int_0^4 2\alpha u \exp(\alpha u^2) du = \exp(16\alpha) - 1.$$

— Pour $u \geq 4$, en injectant la décroissance gaussienne $\mu(\|x\|/M > u) \leq \exp(-2\alpha u^2)$:

$$\int_4^\infty 2\alpha u \exp(\alpha u^2) \exp(-2\alpha u^2) du = \int_4^\infty 2\alpha u \exp(-\alpha u^2) du = \exp(-16\alpha) \leq 1.$$

En sommant ces deux contributions, on obtient la borne universelle :

$$\int_{\mathcal{B}} \exp\left(\alpha \frac{\|x\|^2}{M^2}\right) \mu(dx) \leq \exp(16\alpha) =: K < \infty.$$

Étape 3 : Contrôle des moments d'ordre $2n$.

Pour tout $u \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$, le terme d'ordre n de la série exponentielle donne :

$$\frac{(\alpha u^2)^n}{n!} \leq \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha u^2)^k}{k!} = \exp(\alpha u^2), \quad \text{d'où} \quad u^{2n} \leq n! \alpha^{-n} \exp(\alpha u^2).$$

En évaluant cette inégalité en $u = \frac{\|x\|}{M}$ et en intégrant sous la mesure μ , on obtient :

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\|x\|}{M}\right)^{2n} \mu(dx) \leq n! \alpha^{-n} \int_{\mathcal{B}} \exp\left(\alpha \frac{\|x\|^2}{M^2}\right) \mu(dx) \leq n! K \alpha^{-n}.$$

En multipliant par M^{2n} , on en déduit l'estimation requise sur les moments d'ordre pair :

$$\int_{\mathcal{B}} \|x\|^{2n} \mu(dx) \leq n! K \alpha^{-n} M^{2n}.$$

Le contrôle général pour tout $p \geq 1$ découle alors directement de l'inégalité de Hölder en encadrant p par l'entier pair supérieur $2n \geq p$. $\square$

Lorsque l'on restreint le cadre général des espaces de Banach à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, l'identification du dual à l'espace lui-même permet de voir l'opérateur de covariance comme un endomorphisme de $\mathcal{H}$. Pour déterminer sous quelles conditions spectrales un tel opérateur peut définir la covariance d'une véritable mesure gaussienne sur $\mathcal{H}$ (en garantissant notamment que $\mathbb{E}[\|x\|_{\mathcal{H}}^2] < \infty$), il est nécessaire d'introduire la notion d'opérateur à trace.

Définition 2.10 (Opérateur à trace). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$. Soit $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire, continu et positif. On définit la trace de A , notée $\text{tr}(A)$, par la quantité :*

$$\text{tr}(A) = \sum_{n \geq 0} \langle A e_n, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \in [0, +\infty],$$

où $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne quelconque de $\mathcal{H}$. Cette quantité est indépendante du choix de la base hilbertienne (résultat admis). Si $\text{tr}(A) < \infty$, on dit que A est un opérateur à trace.

Ces opérateurs à trace joueront un rôle primordial dans la suite de ce travail, notamment pour formaliser la structure de covariance du bruit blanc et pour définir rigoureusement les intégrales stochastiques en dimension infinie.

Proposition 2.10 (Caractérisation de la covariance sur un espace de Hilbert). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*

1. *Si μ est une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{H}$, alors son opérateur de covariance $\hat{C}_\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur positif, symétrique et à trace. De plus, on a l'identité :*

$$\int_{\mathcal{H}} \|x\|_{\mathcal{H}}^2 \mu(dx) = \text{tr}(\hat{C}_\mu).$$

2. *Réciproquement, pour tout opérateur $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ symétrique, positif et à trace ($\text{tr}(K) < \infty$), il existe une unique mesure gaussienne centrée μ sur $\mathcal{H}$ telle que $\hat{C}_\mu = K$.*

Démonstration. Sens direct :

Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Par l'identité de Parseval et le théorème de Fubini-Tonelli pour les séries à termes positifs, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} \|x\|_{\mathcal{H}}^2 \mu(dx) &= \int_{\mathcal{H}} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 \mu(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{H}} \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 \mu(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_\mu(e_n, e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \hat{C}_\mu e_n, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \text{tr}(\hat{C}_\mu). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fernique, le membre de gauche est fini. L'opérateur $\hat{C}_\mu$ est donc bien un opérateur à trace, et par la Proposition 2.5, il est symétrique et positif.

Sens réciproque :

Soit $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire symétrique, positif et à trace.

Étape 1 : Décomposition spectrale de K .

Tout opérateur à trace est compact (en tant que limite pour la norme d'opérateur de projecteurs de rang fini). Le théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints (voir Brézis [1, Théorème VI.11]) garantit l'existence d'une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{H}$ constituée de vecteurs propres :

$$K e_n = \lambda_n e_n, \quad \text{avec } \lambda_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \text{tr}(K) < \infty.$$

Étape 2 : Construction de la variable aléatoire gaussienne.

Soit $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour tout $N \geq 1$, posons la somme partielle $X_N = \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} \gamma_n e_n$.

Puisque les (γ_n) sont centrées et indépendantes, la famille $(\sqrt{\lambda_n} \gamma_n e_n)$ est orthogonale dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$. Pour tous $M > N \geq 1$, on a :

$$\mathbb{E} [\|X_M - X_N\|_{\mathcal{H}}^2] = \sum_{n=N+1}^M \lambda_n \mathbb{E}[\gamma_n^2] = \sum_{n=N+1}^M \lambda_n \xrightarrow{N, M \rightarrow \infty} 0.$$

La suite (X_N) est donc de Cauchy dans l'espace de Hilbert complet $L^2(\Omega; \mathcal{H})$. Elle converge donc vers une variable aléatoire $X \in L^2(\Omega; \mathcal{H})$, ce qui assure que $X \in \mathcal{H}$ presque sûrement. Par le théorème d'Itô-Nisio [9], la série converge également presque sûrement.

Étape 3 : Caractère gaussien de la loi μ .

Soit $\mu = \text{Law}(X)$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, la projection scalaire s'écrit :

$$\langle X, h \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle X_N, h \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} \langle e_n, h \rangle_{\mathcal{H}} \gamma_n \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Pour chaque N , la somme finie est une variable gaussienne réelle centrée. La convergence dans $L^2(\Omega)$ entraînant la convergence en loi, le Lemme 2.1 garantit que la limite $\langle X, h \rangle_{\mathcal{H}}$ est une variable aléatoire gaussienne réelle pour tout $h \in \mathcal{H}$. D'après la Définition 2.7, μ est bien une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{H}$.

Étape 4 : Identification de l'opérateur de covariance.

Soient $h, k \in \mathcal{H}$. Par continuité du produit scalaire sur $L^2(\Omega)$, on peut passer à la limite sur les sommes partielles :

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_\mu h, k \rangle_{\mathcal{H}} &= \mathbb{E}[\langle X, h \rangle_{\mathcal{H}} \langle X, k \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle X_N, h \rangle_{\mathcal{H}} \langle X_N, k \rangle_{\mathcal{H}}] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sqrt{\lambda_n \lambda_m} \langle e_n, h \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_m, k \rangle_{\mathcal{H}} \mathbb{E}[\gamma_n \gamma_m]. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}[\gamma_n \gamma_m] = \delta_{n,m}$, les termes croisés s'annulent :

$$\langle \hat{C}_\mu h, k \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, h \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_n, k \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K e_n, h \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_n, k \rangle_{\mathcal{H}} = \langle K h, k \rangle_{\mathcal{H}},$$

la dernière égalité découlant de la symétrie de K et de la formule de Parseval. Cette égalité étant vérifiée pour tous $h, k \in \mathcal{H}$, on en déduit $\hat{C}_\mu = K$. L'unicité découle du Corollaire 2.3. $\square$

La proposition précédente résout entièrement la question de l'existence des mesures gaussiennes sur les espaces de Hilbert : elles sont en bijection exacte avec les opérateurs auto-adjoints positifs à trace. En particulier, cette contrainte de trace finie confirme l'obstacle théorique fondamental mentionné en introduction : l'opérateur identité $\text{Id}_{\mathcal{H}}$ n'étant pas à trace en dimension infinie, il est impossible de définir une mesure gaussienne d'opérateur de covariance $\text{Id}_{\mathcal{H}}$ directement sur $\mathcal{H}$.

Avant d'aborder la résolution de ce problème au chapitre suivant via l'espace élargi $\mathcal{H}'$ et la construction du mouvement brownien cylindrique, il convient d'étudier la structure géométrique interne de ces mesures gaussiennes sur un espace de Banach général : caractériser leurs directions de translation admissibles via l'espace de Cameron-Martin et analyser leur comportement sous l'action d'applications linéaires.

2.3 Structure géométrique

Cette partie est dédiée à l'étude de la structure géométrique interne des mesures gaussiennes en dimension infinie. Nous y explorons les propriétés topologiques des directions de translation ainsi que le comportement de ces mesures sous l'action d'applications linéaires.

Espaces de Cameron-Martin

Cette sous-partie introduit les espaces de Cameron-Martin, ainsi que leurs propriétés fondamentales et les principaux théorèmes qui en découlent.

Définition 2.11 (Espace de Cameron-Martin). *Soit μ une mesure gaussienne sur un espace de Banach séparable $\mathcal{B}$.*

On définit le sous-espace linéaire $\mathcal{H}_\mu^\circ \subset \mathcal{B}$ par l'image de l'opérateur de covariance $\hat{C}_\mu$:

$$\mathcal{H}_\mu^\circ = \left\{ h \in \mathcal{B} \mid \exists h^* \in \mathcal{B}^* \text{ tel que } \hat{C}_\mu(h^*)(\ell) = C_\mu(h^*, \ell) = \ell(h) \text{ pour tout } \ell \in \mathcal{B}^* \right\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire $\langle h, k \rangle_\mu := C_\mu(h^*, k^*)$ et de la norme associée $\|h\|_\mu := \sqrt{C_\mu(h^*, h^*)}$.

L'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$ est l'espace de Hilbert obtenu comme le complété de $\mathcal{H}_\mu^\circ$ pour cette norme $\|\cdot\|_\mu$.

Remarque 3. *L'intérêt de l'espace de Cameron-Martin est de trouver un sous-espace à l'intérieur de notre espace de Banach qui possède un produit scalaire. Ce produit scalaire est entièrement construit à partir de la covariance, ce qui permet d'utiliser les outils de la géométrie hilbertienne.*

Lemme 2.2. *L'application $\|\cdot\|_\mu$ définie sur $\mathcal{H}_\mu^\circ$ par $\|h\|_\mu = \sqrt{C_\mu(h^*, h^*)}$ est une norme bien définie, indépendante du choix de l'antécédent $h^* \in \mathcal{B}^*$.*

Démonstration. Montrons d'abord que la quantité $\|h\|_\mu$ est bien définie. Soit $h \in \mathcal{H}_\mu^\circ$ et supposons qu'il existe deux formes linéaires $h_1^*, h_2^* \in \mathcal{B}^*$ associées à h , c'est-à-dire telles que pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$, on ait $C_\mu(h_1^*, \ell) = \ell(h)$ et $C_\mu(h_2^*, \ell) = \ell(h)$. Par soustraction, il vient $C_\mu(h_1^* - h_2^*, \ell) = 0$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$. En évaluant cette identité successivement pour $\ell = h_1^*$ puis $\ell = h_2^*$, la bilinéarité et la symétrie de C_μ donnent :

$$C_\mu(h_1^*, h_1^*) = C_\mu(h_2^*, h_1^*) = C_\mu(h_1^*, h_2^*) = C_\mu(h_2^*, h_2^*).$$

La valeur de $C_\mu(h^*, h^*)$ est donc strictement identique quel que soit l'antécédent h^* choisi, ce qui valide la bonne définition de l'application.

La bilinéarité, la symétrie et la positivité de C_μ (Proposition 2.5) impliquent alors immédiatement que $\|\cdot\|_\mu$ hérite des propriétés d'une semi-norme. Montrons la définie-positivité.

Soit $h \in \mathcal{H}_\mu^\circ$ tel que $\|h\|_\mu = 0$, ce qui signifie par définition qu'il existe un antécédent h^* vérifiant $C_\mu(h^*, h^*) = 0$. Puisque C_μ est une forme bilinéaire symétrique positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique et donne pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$:

$$|C_\mu(h^*, \ell)| \leq \sqrt{C_\mu(h^*, h^*)} \sqrt{C_\mu(\ell, \ell)} = \|h\|_\mu \sqrt{C_\mu(\ell, \ell)} = 0.$$

On en déduit que $C_\mu(h^*, \ell) = 0$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$. D'après la définition de l'espace $\mathcal{H}_\mu^\circ$, l'élément h vérifie la relation $\ell(h) = C_\mu(h^*, \ell)$. Par conséquent, on obtient :

$$\ell(h) = 0 \quad \text{pour tout } \ell \in \mathcal{B}^*.$$

Le théorème de Hahn-Banach assurant que les formes linéaires continues séparent les points de $\mathcal{B}$, l'annulation de $\ell(h)$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$ entraîne nécessairement que $h = 0$. La définie-positivité est ainsi établie. $\square$

Proposition 2.11. *On a l'égalité :*

$$\mathcal{H}_\mu^\circ = \text{Im}(\hat{C}_\mu).$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.4, l'opérateur $\hat{C}_\mu$ est à valeurs dans $\mathcal{B}$ et vérifie $\ell(\hat{C}_\mu h^*) = C_\mu(h^*, \ell)$ pour tous $h^*, \ell \in \mathcal{B}^*$. Dès lors :

$$h \in \mathcal{H}_\mu^\circ \iff \exists h^* \in \mathcal{B}^*, \forall \ell \in \mathcal{B}^*, \ell(h) = \ell(\hat{C}_\mu h^*) \iff \exists h^* \in \mathcal{B}^*, h = \hat{C}_\mu h^*,$$

la seconde équivalence résultant du théorème de Hahn-Banach (le dual $\mathcal{B}^*$ sépare les points de $\mathcal{B}$). On en déduit directement $\mathcal{H}_\mu^\circ = \text{Im}(\hat{C}_\mu)$. $\square$

Proposition 2.12 (Espace de Cameron-Martin en dimension finie). *Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$, l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$ coïncide avec l'image de la matrice de covariance $\hat{C}_\mu$. De plus, pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$, sa norme s'exprime par :*

$$\|h\|_\mu^2 = \langle \hat{C}_\mu^\dagger h, h \rangle,$$

où $\hat{C}_\mu^\dagger$ désigne le pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice de covariance (qui coïncide avec l'inverse usuel $\hat{C}_\mu^{-1}$ dès lors que la covariance est inversible).

Démonstration. Étape 1 : Identification de l'espace $\mathcal{H}_\mu$.

D'après la Proposition 2.11, l'espace des éléments lisses vérifie $\mathcal{H}_\mu^\circ = \text{Im}(\hat{C}_\mu)$. En dimension finie ($\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$), le sous-espace vectoriel $\text{Im}(\hat{C}_\mu)$ est de dimension finie, il est donc fermé et déjà complet pour la norme de Hilbert $\|\cdot\|_\mu$. Son complété coïncide donc avec lui-même :

$$\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H}_\mu^\circ = \text{Im}(\hat{C}_\mu).$$

Étape 2 : Calcul de la norme de Cameron-Martin.

Soit $h \in \mathcal{H}_\mu = \text{Im}(\hat{C}_\mu)$. D'après la Proposition 2.11, il existe un antécédent $h^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\hat{C}_\mu h^* = h$. La norme de h dans $\mathcal{H}_\mu$ est alors donnée par :

$$\|h\|_\mu^2 = C_\mu(h^*, h^*) = \langle \hat{C}_\mu h^*, h^* \rangle = \langle h, h^* \rangle.$$

Si la matrice de covariance $\hat{C}_\mu$ est inversible (loi gaussienne non dégénérée), l'antécédent h^* est unique et s'écrit $h^* = \hat{C}_\mu^{-1} h$. En réinjectant cette expression et par symétrie de la matrice inverse, il vient :

$$\|h\|_\mu^2 = \langle h, \hat{C}_\mu^{-1} h \rangle = \langle \hat{C}_\mu^{-1} h, h \rangle.$$

Dans le cas général où $\hat{C}_\mu$ n'est pas inversible (loi gaussienne dégénérée sur $\mathbb{R}^n$), la matrice symétrique réelle $\hat{C}_\mu$ induit la décomposition orthogonale $\mathbb{R}^n = \text{Im}(\hat{C}_\mu) \oplus \ker(\hat{C}_\mu)$. L'antécédent h^* n'est pas unique à un élément du noyau près, mais le pseudo-inverse de Moore-Penrose $\hat{C}_\mu^\dagger$ fournit l'unique antécédent situé dans $\ker(\hat{C}_\mu)^\perp = \text{Im}(\hat{C}_\mu)$:

$$h_{\text{opt}}^* = \hat{C}_\mu^\dagger h.$$

Par symétrie de $\hat{C}_\mu^\dagger$, on en conclut que pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$:

$$\|h\|_\mu^2 = \langle h, \hat{C}_\mu^\dagger h \rangle = \langle \hat{C}_\mu^\dagger h, h \rangle.$$

□

Proposition 2.13. *On a $\mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{B}$. De plus, on a la majoration :*

$$\|h\|_\mu^2 \geq \|C_\mu\|^{-1} \|h\|_{\mathcal{B}}^2,$$

où $\|C_\mu\|$ désigne la norme d'opérateur de la forme bilinéaire C_μ (ou, de manière équivalente, de l'opérateur de covariance restreint $\hat{C}_\mu : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}$). De plus, l'injection canonique $\iota : \mathcal{H}_\mu \hookrightarrow \mathcal{B}$ est un opérateur compact (la boule unité fermée de $\mathcal{H}_\mu$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{B}$).

Démonstration. Dans un premier temps, on a la chaîne d'inégalités pour tout élément $h \in \mathcal{H}_\mu^\circ$:

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{B}}^2 &= \sup_{\ell \in \mathcal{B}^* \setminus \{0\}} \frac{\ell(h)^2}{\|\ell\|_{\mathcal{B}^*}^2} = \sup_{\ell \in \mathcal{B}^* \setminus \{0\}} \frac{C_\mu(h^*, \ell)^2}{\|\ell\|_{\mathcal{B}^*}^2} \\ &\leq \sup_{\ell \in \mathcal{B}^* \setminus \{0\}} \frac{C_\mu(h^*, h^*) C_\mu(\ell, \ell)}{\|\ell\|_{\mathcal{B}^*}^2} \quad (\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \|C_\mu\| \|h\|_\mu^2, \end{aligned}$$

ce qui donne la borne recherchée sur les normes après inversion de la constante.

Montrons maintenant la seconde partie de la proposition. Il découle de la borne précédente que l'injection canonique $\iota : \mathcal{H}_\mu^\circ \rightarrow \mathcal{B}$ est une application linéaire bornée et donc continue. Comme $\mathcal{H}_\mu^\circ$ est dense dans l'espace de Hilbert complet $\mathcal{H}_\mu$, cette application se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\iota : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{B}$. Mentionnons ici que l'inclusion topologique attendue $\mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{B}$ s'interprète rigoureusement par l'injectivité de ce prolongement continu ι , ce qui permet d'identifier l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\mu$ à son image $\iota(\mathcal{H}_\mu)$ qui constitue un sous-ensemble de $\mathcal{B}$. Il reste donc à vérifier que ι est injective.

Supposons par l'absurde que ι ne soit pas injective. Par linéarité, il existe $f \in \mathcal{H}_\mu$ non nulle telle que $\iota(f) = 0$. Par densité de $\mathcal{H}_\mu^\circ$ dans $\mathcal{H}_\mu$, on peut construire une suite d'éléments lisses $(f_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{H}_\mu^\circ$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{H}_\mu$. Par continuité de ι , on a également $f_n = \iota(f_n) \rightarrow \iota(f) = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Soit maintenant $h \in \mathcal{H}_\mu^\circ$. Par définition, il existe une forme linéaire continue $h^* \in \mathcal{B}^*$ telle que $\hat{C}_\mu h^* = h$. Pour chaque $n \geq 0$, comme $f_n \in \mathcal{H}_\mu^\circ$, il existe $f_n^* \in \mathcal{B}^*$ tel que $\hat{C}_\mu f_n^* = f_n$. En utilisant la définition du produit scalaire sur $\mathcal{H}_\mu$, on obtient :

$$|\langle h, f_n \rangle_\mu| = |C_\mu(h^*, f_n^*)| = |h^*(\hat{C}_\mu f_n^*)| = |h^*(f_n)| \leq \|h^*\|_{\mathcal{B}^*} \|f_n\|_{\mathcal{B}}.$$

Comme $\|h^*\|_{\mathcal{B}^*}$ est finie et $\|f_n\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$, le membre de droite tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Par passage à la limite et par continuité du produit scalaire, il vient :

$$\langle h, f \rangle_\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h, f_n \rangle_\mu = 0.$$

L'élément f est donc orthogonal à tout élément $h \in \mathcal{H}_\mu^\circ$. Puisque $\mathcal{H}_\mu^\circ$ est dense dans $\mathcal{H}_\mu$, le seul élément orthogonal à l'espace entier est le vecteur nul, d'où $f = 0$.

Ceci contredit l'hypothèse $f \neq 0$, ce qui prouve l'injectivité de ι et valide l'inclusion topologique par identification de $\mathcal{H}_\mu$ à $\iota(\mathcal{H}_\mu) \subset \mathcal{B}$.

Montrons enfin que l'injection canonique $\iota : \mathcal{H}_\mu \hookrightarrow \mathcal{B}$ est un opérateur compact. Notons $B = \{h \in \mathcal{H}_\mu \mid \|h\|_\mu \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathcal{H}_\mu$. D'après le théorème de Fernique (Corollaire 2.4), la norme est de carré intégrable :

$\int_{\mathcal{B}} \|x\|_{\mathcal{B}}^2 \mu(dx) < \infty$. D'autre part, la mesure μ étant tendue sur l'espace polonais $\mathcal{B}$ (Proposition 2.3), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble compact $K \subset \mathcal{B}$ tel que :

$$\int_{\mathcal{B} \setminus K} \|x\|_{\mathcal{B}}^2 \mu(dx) \leq \varepsilon^2.$$

L'ensemble K étant compact dans $\mathcal{B}$, il est précompact et admet un ε -réseau fini $\{y_1, \dots, y_m\} \subset K$. Soit $P: K \rightarrow \{y_1, \dots, y_m\}$ une projection borélienne associant à chaque point $x \in K$ l'un de ses plus proches voisins dans le réseau, de sorte que $\sup_{x \in K} \|x - P(x)\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon$.

Tout élément lisse $h \in \mathcal{H}_{\mu}^{\circ} \cap B$ s'écrit sous la forme de Bochner $h = \int_{\mathcal{B}} x h^*(x) \mu(dx)$ avec $\|h^*\|_{L^2(\mu)} = \|h\|_{\mu} \leq 1$. Décomposons cette intégrale en trois contributions :

$$h = \int_{\mathcal{B} \setminus K} x h^*(x) \mu(dx) + \int_K (x - P(x)) h^*(x) \mu(dx) + \int_K P(x) h^*(x) \mu(dx).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'intégrale de Bochner :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathcal{B} \setminus K} x h^*(x) \mu(dx) \right\|_{\mathcal{B}} &\leq \left(\int_{\mathcal{B} \setminus K} \|x\|_{\mathcal{B}}^2 \mu(dx) \right)^{1/2} \|h^*\|_{L^2(\mu)} \leq \varepsilon, \\ \left\| \int_K (x - P(x)) h^*(x) \mu(dx) \right\|_{\mathcal{B}} &\leq \varepsilon \int_K |h^*(x)| \mu(dx) \leq \varepsilon \|h^*\|_{L^2(\mu)} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Le troisième terme est confiné dans un sous-espace de dimension finie :

$$T(h) := \int_K P(x) h^*(x) \mu(dx) = \sum_{j=1}^m y_j \int_{P^{-1}(y_j)} h^*(x) \mu(dx) = \sum_{j=1}^m c_j y_j,$$

où, en posant $A_j = P^{-1}(y_j) \cap K$, la somme des coefficients au carré vérifie :

$$\sum_{j=1}^m c_j^2 = \sum_{j=1}^m \left(\int_{A_j} h^*(x) \mu(dx) \right)^2 \leq \sum_{j=1}^m \mu(A_j) \int_{A_j} h^*(x)^2 \mu(dx) \leq \mu(K) \|h^*\|_{L^2(\mu)}^2 \leq 1.$$

L'ensemble $E = \left\{ \sum_{j=1}^m c_j y_j \mid \sum_{j=1}^m c_j^2 \leq 1 \right\}$ est l'image continue de la boule unité de $\mathbb{R}^m$, c'est donc une partie compacte de $\mathcal{B}$.

On a ainsi montré que pour tout élément $h \in \mathcal{H}_{\mu}^{\circ} \cap B$, $\text{dist}_{\mathcal{B}}(h, E) \leq 2\varepsilon$. Par densité de $\mathcal{H}_{\mu}^{\circ} \cap B$ dans B , cette propriété s'étend à la boule unité fermée complète B . Le compact E pouvant être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε , l'ensemble B peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon 3ε dans $\mathcal{B}$. Le réel $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, B est totalement bornée (précompacte) dans l'espace de Banach complet $\mathcal{B}$, donc d'adhérence compacte. Enfin, la boule unité d'un espace de Hilbert étant faiblement compacte, toute valeur d'adhérence de B pour la topologie de $\mathcal{B}$ appartient nécessairement à B , ce qui démontre que B est compacte dans $\mathcal{B}$ et achève d'établir la compacité de l'opérateur ι . $\square$

Remarque 4 (Compacité de l'injection et dimension infinie). *La compacité de l'injection $\iota: \mathcal{H}_{\mu} \hookrightarrow \mathcal{B}$ est une propriété fondamentale :*

1. *Lorsque $\dim \mathcal{H}_{\mu} = \infty$, l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_{\mu}$ n'est jamais fermé dans $\mathcal{B}$; s'il l'était, sa boule unité fermée serait compacte dans l'espace normé $\mathcal{H}_{\mu}$, ce qui contredirait le théorème de Riesz sur la compacité en dimension finie.*
2. *Cette compacité garantit la compacité des sous-niveaux d'énergie de l'action dans le principe de grandes déviations pour les mesures gaussiennes (théorème de Schilder).*

Avant d'établir l'isomorphisme fondamental avec l'espace de Cameron-Martin, précisons la nature de l'espace fonctionnel sous-jacent. D'après le théorème de Fernique (Corollaire 2.4), toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}^*$ est de carré intégrable par rapport à la mesure μ :

$$\|\ell\|_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}^2 = \int_{\mathcal{B}} \ell(x)^2 \mu(dx) = C_{\mu}(\ell, \ell) < \infty.$$

Chaque forme continue $\ell \in \mathcal{B}^*$ s'identifie ainsi à un élément de l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{B}, \mu)$. On définit l'espace $\mathcal{R}_\mu$ comme l'adhérence de cette famille dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$:

$$\mathcal{R}_\mu := \overline{\mathcal{B}^*}^{L^2(\mathcal{B}, \mu)}.$$

En tant que sous-espace fermé de $L^2(\mathcal{B}, \mu)$, l'espace $\mathcal{R}_\mu$ est lui-même un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = \int_{\mathcal{B}} f(x)g(x) \mu(dx).$$

Soulignons une distinction conceptuelle essentielle : contrairement aux formes de $\mathcal{B}^*$, les éléments de $\mathcal{R}_\mu$ sont des classes d'équivalence de fonctions mesurables définies seulement μ -presque partout. Ils ne sont donc plus définis ponctuellement en tout point de $\mathcal{B}$ et perdent *a priori* la propriété de linéarité stricte. Cette difficulté motivera l'introduction d'un représentant linéaire défini sur un sous-espace de mesure pleine (Proposition 2.17).

Proposition 2.14. *Il existe un isomorphisme d'espaces de Hilbert canonique $\Psi_\mu : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{R}_\mu$. Cet opérateur prolonge l'application définie sur le sous-espace dense par $\Psi_\mu(\hat{C}_\mu \ell) = \ell$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$. En particulier, l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$ est séparable.*

Démonstration. Étape 1 : Bonne définition et isométrie sur le sous-espace dense.

D'après la Proposition 2.11, on a l'identification $\mathcal{H}_\mu^\circ = \text{Im}(\hat{C}_\mu)$. Pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu^\circ$, il existe donc au moins une forme $\ell \in \mathcal{B}^*$ telle que $h = \hat{C}_\mu \ell$.

Posons $\Psi_\mu(h) = \ell \in L^2(\mathcal{B}, \mu)$. Cette application est indépendante du choix de l'antécédent : si $\hat{C}_\mu \ell_1 = \hat{C}_\mu \ell_2$, la linéarité de $\hat{C}_\mu$ donne $\hat{C}_\mu(\ell_1 - \ell_2) = 0$. La norme dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$ vérifie alors :

$$\|\ell_1 - \ell_2\|_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}^2 = C_\mu(\ell_1 - \ell_2, \ell_1 - \ell_2) = (\ell_1 - \ell_2)(\hat{C}_\mu(\ell_1 - \ell_2)) = 0.$$

Les formes ℓ_1 et ℓ_2 définissent donc la même classe dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$, ce qui prouve que $\Psi_\mu : \mathcal{H}_\mu^\circ \rightarrow L^2(\mathcal{B}, \mu)$ est bien définie.

De plus, pour tous $h_1 = \hat{C}_\mu \ell_1$ et $h_2 = \hat{C}_\mu \ell_2$ dans $\mathcal{H}_\mu^\circ$, la définition du produit scalaire sur $\mathcal{H}_\mu$ donne :

$$\langle h_1, h_2 \rangle_\mu = C_\mu(\ell_1, \ell_2) = \int_{\mathcal{B}} \ell_1(x)\ell_2(x) \mu(dx) = \langle \Psi_\mu(h_1), \Psi_\mu(h_2) \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}.$$

L'application Ψ_μ est donc une isométrie linéaire de $\mathcal{H}_\mu^\circ$ dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$.

Étape 2 : Prolongement et surjectivité sur $\mathcal{R}_\mu$.

L'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$ étant le complété de $\mathcal{H}_\mu^\circ$, l'isométrie Ψ_μ se prolonge de manière unique en une isométrie linéaire sur $\mathcal{H}_\mu$ tout entier. Comme Ψ_μ est une isométrie et que $\mathcal{H}_\mu$ est complet, son image $\text{Im}(\Psi_\mu)$ est un sous-espace complet de $L^2(\mathcal{B}, \mu)$, donc fermé.

Montrons que $\text{Im}(\Psi_\mu) = \mathcal{R}_\mu$:

- Pour toute forme $\ell \in \mathcal{B}^*$, l'élément $h = \hat{C}_\mu \ell$ appartient à $\mathcal{H}_\mu^\circ \subset \mathcal{H}_\mu$ et vérifie $\Psi_\mu(h) = \ell$. On a donc l'inclusion $\mathcal{B}^* \subset \text{Im}(\Psi_\mu)$.
- L'image $\text{Im}(\Psi_\mu)$ étant fermée, elle contient l'adhérence de $\mathcal{B}^*$ dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$, d'où $\mathcal{R}_\mu \subset \text{Im}(\Psi_\mu)$.
- Réciproquement, par densité de $\mathcal{H}_\mu^\circ$ dans $\mathcal{H}_\mu$, tout élément de l'image est limite d'images d'éléments de $\mathcal{H}_\mu^\circ$ (qui sont dans $\mathcal{B}^*$), d'où $\text{Im}(\Psi_\mu) \subset \overline{\mathcal{B}^*}^{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = \mathcal{R}_\mu$.

L'isométrie $\Psi_\mu : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{R}_\mu$ est donc surjective, ce qui en fait un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

Étape 3 : Séparabilité.

L'espace de Banach $\mathcal{B}$ étant polonais (séparable), sa tribu borélienne est à engendrement dénombrable, ce qui assure la séparabilité de l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{B}, \mu)$. En tant que sous-espace fermé, $\mathcal{R}_\mu$ est séparable. Par isomorphisme isométrique, $\mathcal{H}_\mu$ est également séparable. $\square$

Une conséquence fondamentale de cet isomorphisme réside dans l'extension de la formule de dualité à tout élément du complété $\mathcal{H}_\mu$:

Corollaire 2.5 (Propriété reproduisante de l'espace de Cameron-Martin). *Pour tout élément $h \in \mathcal{H}_\mu$ et pour toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}^*$, on a :*

$$\ell(h) = \langle h, \hat{C}_\mu \ell \rangle_\mu = \langle \Psi_\mu(h), \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}.$$

En particulier, l'élément $\hat{C}_\mu \ell \in \mathcal{H}_\mu^\circ$ est le représentant de Riesz dans $\mathcal{H}_\mu$ de la restriction $\ell|_{\mathcal{H}_\mu}$.

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$ et $\ell \in \mathcal{B}^*$. D'après la Proposition 2.14, l'application $\Psi_\mu : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{R}_\mu$ est une isométrie qui vérifie $\Psi_\mu(\hat{C}_\mu \ell) = \ell$. On a donc directement :

$$\langle h, \hat{C}_\mu \ell \rangle_\mu = \langle \Psi_\mu(h), \Psi_\mu(\hat{C}_\mu \ell) \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = \langle \Psi_\mu(h), \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}.$$

Il reste à vérifier que cette quantité coïncide avec $\ell(h)$. Par densité de $\mathcal{H}_\mu^\circ$ dans $\mathcal{H}_\mu$, il existe une suite $(h_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}_\mu^\circ$ telle que $h_n \rightarrow h$ dans $\mathcal{H}_\mu$. Pour chaque n , $h_n = \hat{C}_\mu \ell_n$ avec $\ell_n = \Psi_\mu(h_n) \in \mathcal{B}^*$, de sorte que :

$$\ell(h_n) = C_\mu(\ell_n, \ell) = \langle \Psi_\mu(h_n), \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}.$$

Quand $n \rightarrow \infty$, l'isométrie Ψ_μ implique $\Psi_\mu(h_n) \rightarrow \Psi_\mu(h)$ dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$, donc le membre de droite converge vers $\langle \Psi_\mu(h), \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}$. D'autre part, la continuité de l'injection $\mathcal{H}_\mu \hookrightarrow \mathcal{B}$ assure que $h_n \rightarrow h$ dans $\mathcal{B}$. La continuité de la forme $\ell \in \mathcal{B}^*$ entraîne alors $\ell(h_n) \rightarrow \ell(h)$. Par unicité de la limite, on en conclut que $\ell(h) = \langle \Psi_\mu(h), \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}$. $\square$

Nous proposons un petit aide-mémoire sous la forme du diagramme en Figure 1.

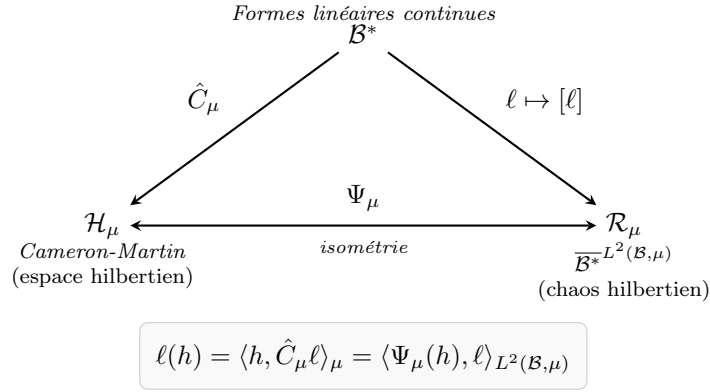


FIGURE 1 – Structure hilbertienne associée à la mesure μ et propriété reproduisante.

La proposition suivante est particulièrement intéressante car elle montre que lorsque l'espace d'états est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, la décomposition spectrale de l'opérateur de covariance K caractérise explicitement l'espace de Cameron-Martin.

Proposition 2.15 (Espace de Cameron-Martin sur un espace de Hilbert). *Soit μ une mesure gaussienne centrée sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, dont l'opérateur de covariance $K = \hat{C}_\mu$ est injectif ($\ker(K) = \{0\}$).*

D'après la Proposition 2.10, K est symétrique, positif et à trace, donc compact. Notons sa décomposition spectrale :

$$K e_n = \lambda_n e_n \quad \text{avec} \quad \lambda_n > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty,$$

où $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Alors :

1. L'espace des éléments lisses vérifie $\mathcal{H}_\mu^\circ = \text{Im}(K)$, et l'antécédent unique est donné par $h^* = K^{-1}h$, où $K^{-1} : \text{Im}(K) \rightarrow \mathcal{H}$ est l'inverse algébrique de K .
2. L'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$ s'identifie au domaine $\mathcal{D}(K^{-1/2}) = \text{Im}(K^{1/2})$:

$$\mathcal{H}_\mu = \left\{ h \in \mathcal{H} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 < \infty \right. \right\}.$$

3. Pour tous $h, k \in \mathcal{H}_\mu$, le produit scalaire de Cameron-Martin s'exprime par :

$$\langle h, k \rangle_\mu = \langle K^{-1/2}h, K^{-1/2}k \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \langle k, e_n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Démonstration. Étape 1 : Caractérisation de l'espace des éléments lisses $\mathcal{H}_\mu^\circ$.

Par identification canonique de $\mathcal{H}^*$ à $\mathcal{H}$ via le théorème de représentation de Riesz, la Proposition 2.11 donne immédiatement $\mathcal{H}_\mu^\circ = \text{Im}(\hat{C}_\mu) = \text{Im}(K)$. L'injectivité de K assure que pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu^\circ$, il existe un unique antécédent $h^* \in \mathcal{H}$ vérifiant $Kh^* = h$, soit $h^* = K^{-1}h$.

Étape 2 : Norme sur le sous-espace dense $\mathcal{H}_\mu^\circ$.

Soit $h \in \mathcal{H}_\mu^\circ$ et posons $h^* = K^{-1}h$. Par définition de l'opérateur de covariance hilbertien (Proposition 2.10), K est caractérisé par la relation $\langle Ku, v \rangle_{\mathcal{H}} = C_\mu(u, v)$ pour tous vecteurs $u, v \in \mathcal{H}$. En évaluant cette forme en $u = v = h^*$, et comme $Kh^* = h$, la norme de Cameron-Martin s'exprime par :

$$\|h\|_\mu^2 = C_\mu(h^*, h^*) = \langle Kh^*, h^* \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, h^* \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Par l'identité de Parseval dans la base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$, développons ce produit scalaire sur les coefficients de Fourier :

$$\|h\|_\mu^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \langle h^*, e_n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Comme K est autoadjoint et que les e_n sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_n , on a l'égalité :

$$\langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Kh^*, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h^*, Ke_n \rangle_{\mathcal{H}} = \lambda_n \langle h^*, e_n \rangle_{\mathcal{H}},$$

ce qui implique, puisque $\lambda_n > 0$:

$$\langle h^*, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \lambda_n^{-1} \langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

En réinjectant cette expression dans la somme, on obtient la formule explicite :

$$\|h\|_\mu^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2.$$

Étape 3 : Complétion et identification de $\mathcal{H}_\mu$.

Considérons le sous-espace vectoriel :

$$\mathcal{D}(K^{-1/2}) = \left\{ x \in \mathcal{H} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 < \infty \right. \right\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}(K^{-1/2})$, le vecteur :

$$K^{-1/2}x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1/2} \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}} e_n$$

converge dans $\mathcal{H}$. L'opérateur $K^{-1/2} : \mathcal{D}(K^{-1/2}) \rightarrow \mathcal{H}$ est une isométrie bijective, conférant à $\mathcal{D}(K^{-1/2})$ une structure hilbertienne pour la norme $\|x\|_{\mathcal{D}(K^{-1/2})} = \|K^{-1/2}x\|_{\mathcal{H}}$.

Puisque $\mathcal{H}_\mu^\circ = \text{Im}(K) \subset \mathcal{D}(K^{-1/2})$, et que les combinaisons linéaires finies de vecteurs propres $\text{Vect}(e_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}_\mu^\circ$ sont denses dans $\mathcal{D}(K^{-1/2})$ pour cette norme, l'espace complet $\mathcal{D}(K^{-1/2})$ s'identifie au complété de $\mathcal{H}_\mu^\circ$. Par unicité du complété hilbertien, on conclut :

$$\mathcal{H}_\mu = \mathcal{D}(K^{-1/2}) = \text{Im}(K^{1/2}).$$

Étape 4 : Formule du produit scalaire.

Pour tous $h, k \in \mathcal{H}_\mu$, la polarisation de la forme quadratique $\|h\|_\mu^2 = \|K^{-1/2}h\|_{\mathcal{H}}^2$ fournit immédiatement :

$$\langle h, k \rangle_\mu = \langle K^{-1/2}h, K^{-1/2}k \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \langle k, e_n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

□

Remarque 5. Si l'opérateur de covariance K possède des valeurs propres nulles ($\lambda_n = 0$ pour certains n), cela signifie que la mesure μ est dégénérée et que sa variance est nulle dans la direction des vecteurs propres associés. Dans ce cas, l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$ est orthogonal au noyau de K (c'est-à-dire $\mathcal{H}_\mu \subset \ker(K)^\perp$). La caractérisation de l'espace reste identique à condition de restreindre la somme aux indices n pour lesquels $\lambda_n > 0$, et la condition $\langle h, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ est impérative pour tout n tel que $\lambda_n = 0$.

Cette formule de représentation permet d'obtenir une caractérisation variationnelle directe de l'espace $\mathcal{H}_\mu$ et de sa norme, en identifiant si un élément arbitraire de $\mathcal{B}$ appartient à l'espace de Cameron-Martin par une simple estimation sur le dual $\mathcal{B}^*$:

Proposition 2.16 (Caractérisation duale de l'espace de Cameron-Martin). *Pour tout vecteur $h \in \mathcal{B}$, posons la quantité (éventuellement infinie) :*

$$|h|_\mu = \sup \{ \ell(h) : \ell \in \mathcal{B}^*, C_\mu(\ell, \ell) \leq 1 \} \in [0, +\infty].$$

Alors l'espace de Cameron-Martin coïncide avec le sous-espace des vecteurs où ce supremum est fini :

$$\mathcal{H}_\mu = \{ h \in \mathcal{B} : |h|_\mu < \infty \},$$

et pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$, on a l'égalité stricte $|h|_\mu = \|h\|_\mu$.

Démonstration. Étape 1 : Coïncidence sur $\mathcal{H}_\mu$ et inclusion $\mathcal{H}_\mu \subset \{h \in \mathcal{B} : |h|_\mu < \infty\}$.

Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$. D'après le Corollaire 2.5, l'action de toute forme $\ell \in \mathcal{B}^*$ s'écrit $\ell(h) = \langle \Psi_\mu(h), \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}$. En rappelant que la condition $C_\mu(\ell, \ell) \leq 1$ équivaut à $\|\ell\|_{L^2} \leq 1$, la dualité de Riesz dans $\mathcal{R}_\mu$ et la densité de $\mathcal{B}^*$ dans $\mathcal{R}_\mu$ donnent :

$$|h|_\mu = \sup_{\substack{\ell \in \mathcal{B}^* \\ \|\ell\|_{L^2} \leq 1}} \ell(h) = \sup_{\substack{\ell \in \mathcal{B}^* \\ \|\ell\|_{L^2} \leq 1}} \langle \Psi_\mu(h), \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = \|\Psi_\mu(h)\|_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}.$$

Puisque Ψ_μ est une isométrie, $\|\Psi_\mu(h)\|_{L^2} = \|h\|_\mu < \infty$. On a donc bien $|h|_\mu = \|h\|_\mu$ pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$, d'où l'inclusion $\mathcal{H}_\mu \subset \{h \in \mathcal{B} : |h|_\mu < \infty\}$.

Étape 2 : Inclusion réciproque $\{h \in \mathcal{B} : |h|_\mu < \infty\} \subset \mathcal{H}_\mu$.

Réciproquement, soit $h \in \mathcal{B}$ tel que $|h|_\mu < \infty$. L'application linéaire $L_h : \ell \mapsto \ell(h)$ est bornée sur $\mathcal{B}^*$ pour la norme $L^2(\mathcal{B}, \mu)$. Par densité de $\mathcal{B}^*$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{R}_\mu$, elle se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{R}_\mu$.

D'après le théorème de représentation de Riesz dans $\mathcal{R}_\mu$, il existe un unique $g \in \mathcal{R}_\mu$ tel que $\ell(h) = \langle g, \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}$ pour tout $\ell \in \mathcal{B}^*$.

Par surjectivité de l'isomorphisme Ψ_μ , posons $\tilde{h} = \Psi_\mu^{-1}(g) \in \mathcal{H}_\mu$. En appliquant le Corollaire 2.5 à ce vecteur $\tilde{h}$, on a immédiatement :

$$\ell(\tilde{h}) = \langle \Psi_\mu(\tilde{h}), \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = \langle g, \ell \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = \ell(h) \quad \text{pour tout } \ell \in \mathcal{B}^*.$$

Il s'ensuit que $\ell(h - \tilde{h}) = 0$ pour toute forme $\ell \in \mathcal{B}^*$. Le théorème de Hahn-Banach assurant que $\mathcal{B}^*$ sépare les points de $\mathcal{B}$, on conclut que $h = \tilde{h} \in \mathcal{H}_\mu$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Corollaire 2.6 (Régularité borélienne de l'espace de Cameron-Martin). *L'application $x \mapsto \|x\|_\mu$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{B}$. En particulier, l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$ est un sous-ensemble borélien de $\mathcal{B}$:*

$$\mathcal{H}_\mu = \bigcup_{M=1}^{\infty} \{x \in \mathcal{B} \mid \|x\|_\mu \leq M\}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.16, la norme s'exprime comme l'enveloppe supérieure d'une famille de formes linéaires continues : $\|x\|_\mu = \sup \{ \ell(x) : \ell \in \mathcal{B}^*, C_\mu(\ell, \ell) \leq 1 \}$. En tant que supremum de fonctions continues, l'application $x \mapsto \|x\|_\mu$ est semi-continue inférieurement. Pour tout $M \geq 1$, l'ensemble de sous-niveau $\{x \in \mathcal{B} : \|x\|_\mu \leq M\}$ est donc fermé dans $\mathcal{B}$. L'espace $\mathcal{H}_\mu = \{x \in \mathcal{B} : \|x\|_\mu < \infty\}$ s'écrit alors comme une réunion dénombrable de fermés, ce qui établit qu'il s'agit d'un borélien. $\square$

Remarque 6. *Comme nous l'avons souligné lors de la définition de $\mathcal{R}_\mu$, le passage à l'adhérence dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$ fait perdre aux éléments la linéarité ponctuelle stricte. La proposition suivante permet de pallier cette difficulté en extrayant de chaque classe d'équivalence une véritable forme linéaire ponctuelle définie sur un sous-espace vectoriel de mesure pleine.*

Proposition 2.17. *Pour tout $\ell \in \mathcal{R}_\mu$, il existe un sous-espace vectoriel mesurable $V_\ell \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$ tel que $\mu(V_\ell) = 1$ et une forme linéaire $\hat{\ell} : V_\ell \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\hat{\ell} = \ell$ μ -presque sûrement.*

Démonstration. Soit $\ell \in \mathcal{R}_\mu$. Par définition de $\mathcal{R}_\mu = \overline{\mathcal{B}^*}^{L^2(\mathcal{B}, \mu)}$, il existe une suite de formes linéaires continues $(\ell_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ qui converge vers ℓ dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$.

Puisque toute suite convergente dans L^2 admet une sous-suite convergeant presque sûrement, il existe une sous-suite $(\ell_n)_{n \geq 1}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(x) = \ell(x)$ pour μ -presque tout $x \in \mathcal{B}$.

Définissons alors le domaine de convergence ponctuelle :

$$V_\ell = \left\{ x \in \mathcal{B} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \right\}.$$

Vérifions les propriétés attendues :

- **Mesurabilité borélienne** : En utilisant le critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$, le domaine V_ℓ s'écrit sous forme d'opérations dénombrables :

$$V_\ell = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n, m \geq N} \left\{ x \in \mathcal{B} \mid |\ell_n(x) - \ell_m(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Pour tout (n, m) , l'application $x \mapsto \ell_n(x) - \ell_m(x)$ est continue sur $\mathcal{B}$, donc chaque ensemble entre accolades est un fermé. Par stabilité dénombrable de la tribu borélienne, on a bien $V_\ell \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$.

- **Structure vectorielle** : Soient $x, y \in V_\ell$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par linéarité de chaque forme continue ℓ_n et par linéarité des limites dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(x) + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(y).$$

La limite existe dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $\alpha x + \beta y \in V_\ell$. L'ensemble V_ℓ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

- **Mesure pleine** : La convergence ayant lieu μ -presque partout, le sous-espace V_ℓ contient un ensemble de mesure pleine, d'où $\mu(V_\ell) = 1$.

On définit alors l'application $\hat{\ell} : V_\ell \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\hat{\ell}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(x).$$

L'application $\hat{\ell}$ est une forme linéaire sur V_ℓ par passage à la limite dans les combinaisons linéaires. Enfin, elle coïncide avec ℓ sur l'ensemble de convergence presque sûre, ce qui assure $\hat{\ell} = \ell$ μ -presque sûrement. $\square$

Remarque 7. Puisque l'espace de probabilité sous-jacent est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\mathcal{B}), \mu)$, tout élément appartenant à $L^2(\mathcal{B}, \mu)$ est formellement une fonction mesurable de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une variable aléatoire réelle. Ainsi, bien qu'ils généralisent la notion de forme linéaire déterministe, les éléments de $\mathcal{R}_\mu$ (que nous notons h^*) s'interprètent naturellement comme des variables aléatoires $x \mapsto h^*(x)$ définies μ -presque sûrement.

Proposition 2.18. Pour tout élément $h \in \mathcal{H}_\mu$, la variable aléatoire $h^* = \Psi_\mu(h) \in \mathcal{R}_\mu$ suit une loi gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$ de variance $\|h\|_\mu^2$.

De plus, pour tous $h, k \in \mathcal{H}_\mu$, leur covariance coïncide avec le produit scalaire de Cameron-Martin :

$$\mathbb{E}_\mu[h^* k^*] = \langle h, k \rangle_\mu.$$

Démonstration. La formule de covariance découle directement du fait que l'isomorphisme $\Psi_\mu : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{R}_\mu \subset L^2(\mathcal{B}, \mu)$ est une isométrie hilbertienne (Proposition 2.14) : elle préserve intrinsèquement les produits scalaires, d'où immédiatement :

$$\mathbb{E}_\mu[h^* k^*] = \langle \Psi_\mu(h), \Psi_\mu(k) \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = \langle h, k \rangle_\mu.$$

En particulier, pour $h = k$, on a $\mathbb{E}_\mu[(h^*)^2] = \|h\|_\mu^2$.

Vérifions à présent la loi de h^* . Par définition de $\mathcal{R}_\mu = \overline{\mathcal{B}^*}^{L^2(\mathcal{B}, \mu)}$, il existe une suite de formes linéaires $(\ell_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ telle que $\ell_n \rightarrow h^*$ dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$.

Par définition d'une mesure gaussienne sur $\mathcal{B}$, chaque variable ℓ_n suit une loi normale centrée $\mathcal{N}(0, \|\ell_n\|_{L^2}^2)$. La convergence dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$ impliquant la convergence en loi, le Lemme 2.1 assure directement que la variable limite h^* suit une loi gaussienne réelle, de variance $\|h^*\|_{L^2}^2 = \|h\|_\mu^2$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Remarque 8. En dimension finie, si l'on multiplie une variable gaussienne par une constante $c \neq 0$, la nouvelle loi reste très proche de la loi d'origine : elles attribuent une probabilité non nulle aux mêmes ensembles.

En dimension infinie, la situation est totalement différente : dès que l'on change d'échelle avec un facteur $c \neq \pm 1$, les deux mesures deviennent étrangères. Cela signifie qu'il existe un ensemble de mesure pleine pour la première loi qui est de mesure nulle pour la seconde. Ce résultat illustre une différence fondamentale entre la dimension finie et la dimension infinie.

Proposition 2.19 (Mesures dilatées en dimension infinie). Soit μ une mesure gaussienne centrée sur un espace de Banach séparable $\mathcal{B}$ telle que $\dim \mathcal{H}_\mu = \infty$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, notons $D_c : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ l'opérateur de dilatation défini par $D_c(x) = cx$.

Alors, pour tout $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, les mesures $D_c^* \mu$ et μ sont mutuellement étrangères :

$$D_c^* \mu \perp \mu.$$

Démonstration. Puisque $\dim \mathcal{H}_\mu = \infty$, l'espace de Hilbert $\mathcal{R}_\mu$ est de dimension infinie et séparable (Proposition 2.14). Il admet donc une base orthonormée $(e_n)_{n \geq 1}$.

D'après la Proposition 2.17, il existe pour chaque $n \geq 1$ un sous-espace vectoriel mesurable $V_n \subset \mathcal{B}$ de mesure pleine $\mu(V_n) = 1$ et une forme linéaire $\hat{e}_n : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ coïncidant avec e_n μ -presque partout. L'intersection dénombrable :

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$$

est un sous-espace vectoriel mesurable de $\mathcal{B}$ vérifiant $\mu(V) = 1$.

Si $c = 0$, on a $D_0(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{B}$, de sorte que la mesure image est la mesure de Dirac en 0 : $D_0^* \mu = \delta_0$. Comme μ est une mesure gaussienne non dégénérée en dimension infinie ($\dim \mathcal{H}_\mu = \infty$), tout singleton est de mesure nulle, en particulier $\mu(\{0\}) = 0$. On a donc $\delta_0(\{0\}) = 1$ et $\mu(\{0\}) = 0$, ce qui assure directement $D_0^* \mu \perp \mu$.

Supposons désormais $c \neq 0$ avec $c \neq \pm 1$. Comme V est un sous-espace vectoriel, il est stable par dilatation : pour tout $x \in V$, on a $cx \in V$, et par linéarité de chaque forme $\hat{e}_n$ sur V :

$$\hat{e}_n(cx) = c \hat{e}_n(x) \quad \text{pour tout } x \in V.$$

D'après la Proposition 2.18, les variables aléatoires $(\hat{e}_n)_{n \geq 1}$ forment une suite de gaussiennes centrées sous μ . Comme elles sont orthogonales et de norme 1 dans $\mathcal{R}_\mu$, elles sont non corrélées, donc mutuellement indépendantes, et suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Considérons la suite de variables mesurables définie pour $x \in V$ par :

$$X_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{e}_n(x)^2.$$

Puisque les $(\hat{e}_n^2)_{n \geq 1}$ sont indépendantes, identiquement distribuées, et d'espérance $\mathbb{E}_\mu[\hat{e}_n^2] = 1$, la loi forte des grands nombres garantit que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_N(x) = 1 \quad \mu\text{-presque sûrement.}$$

Définissons l'ensemble borélien :

$$A = \left\{ x \in V \mid \lim_{N \rightarrow \infty} X_N(x) = 1 \right\}.$$

On a par construction $\mu(A) = 1$.

Calculons à présent la mesure de cet ensemble sous la loi dilatée $D_c^* \mu$. Par définition de la mesure image et par la relation $\hat{e}_n(cx) = c \hat{e}_n(x)$ sur V :

$$\begin{aligned} (D_c^* \mu)(A) &= \mu(\{x \in \mathcal{B} : D_c(x) \in A\}) \\ &= \mu\left(\left\{ x \in V \mid \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{e}_n(cx)^2 = 1 \right\}\right) \\ &= \mu\left(\left\{ x \in V \mid c^2 \lim_{N \rightarrow \infty} X_N(x) = 1 \right\}\right). \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{N \rightarrow \infty} X_N(x) = 1$ pour μ -presque tout x , le terme entre accolades équivaut presque sûrement à la condition $c^2 \cdot 1 = 1$, soit $c^2 = 1$.

Dès lors que $c \neq \pm 1$, on a $c^2 \neq 1$, ce qui entraîne :

$$(D_c^* \mu)(A) = 0.$$

L'ensemble A vérifiant $\mu(A) = 1$ et $(D_c^* \mu)(A) = 0$, les mesures μ et $D_c^* \mu$ sont mutuellement étrangères. $\square$

Remarque 9. *En théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques, ce résultat possède une conséquence fondamentale : il explique pourquoi le théorème de Girsanov et les méthodes de changement de mesure ne permettent de modifier que le terme de dérive (drift) des équations, et non l'amplitude du bruit. En effet, deux intensités de bruit distinctes produisent des mesures gaussiennes sur l'espace fonctionnel des trajectoires qui sont étrangères, rendant tout changement de mesure absolument continu impossible.*

Sur le plan mathématique, le théorème de Cameron-Martin (établi historiquement pour la mesure de Wiener par Cameron et Martin [2], voir Hairer [7, Théorème 3.66] pour le cadre abstrait sur un espace de Banach) est le résultat fondateur de la géométrie des espaces gaussiens de dimension infinie : il caractérise l'unique sous-espace de translations par lequel la mesure conserve sa structure topologique sans s'effondrer. Son énoncé est le suivant :

Théorème 2.4 (Cameron-Martin, voir Hairer [7, Théorème 3.66]). *Pour tout $h \in \mathcal{B}$, on définit l'application de translation $T_h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ par $T_h(x) = x + h$. Alors, la mesure translatée $T_h^* \mu$ est absolument continue par rapport à μ si et seulement si $h \in \mathcal{H}_\mu$.*

Dans ce cas, les mesures $T_h^* \mu$ et μ sont équivalentes ($T_h^* \mu \sim \mu$), et la densité de Radon-Nikodym est donnée μ -presque sûrement par :

$$\frac{d(T_h^* \mu)}{d\mu}(x) = \exp \left(\Psi_\mu(h)(x) - \frac{1}{2} \|h\|_\mu^2 \right).$$

Démonstration. Montrons dans un premier temps le sens réciproque. Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$ et soit $h^* = \Psi_\mu(h) \in \mathcal{R}_\mu$ l'élément correspondant via l'isomorphisme. D'après la Proposition 2.18, la variable h^* suit une loi gaussienne centrée, ce qui garantit par intégrabilité exponentielle (théorème de Fernique) que l'application $x \mapsto \exp(h^*(x))$ appartient à $L^2(\mathcal{B}, \mu)$ (et donc à $L^1(\mathcal{B}, \mu)$). Sa variance étant donnée par $\|h\|_\mu^2$, la fonction définie par :

$$D_h(x) = \exp \left(h^*(x) - \frac{1}{2} \|h\|_\mu^2 \right)$$

est strictement positive, d'intégrale sous μ égale à 1. Elle définit ainsi la densité de Radon-Nikodym d'une mesure de probabilité μ_h absolument continue par rapport à μ .

Pour vérifier que $\mu_h = T_h^* \mu$, montrons que leurs transformées de Fourier coïncident. Pour toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}^*$, la transformée de Fourier de μ_h s'exprime comme une espérance sous μ :

$$\hat{\mu}_h(\ell) = \int_{\mathcal{B}} \exp \left(i\ell(x) + h^*(x) - \frac{1}{2} \|h\|_\mu^2 \right) \mu(dx) = \exp \left(-\frac{1}{2} \|h\|_\mu^2 \right) \mathbb{E}_\mu \left[e^{i\ell(x) + h^*(x)} \right].$$

La loi conjointe du couple (ℓ, h^*) sous μ étant un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^2$, on évalue l'espérance de l'exponentielle complexe via la formule classique de la fonction caractéristique conjointe :

$$\mathbb{E} [e^{iU+V}] = \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Var}(U) + i \text{Cov}(U, V) + \frac{1}{2} \text{Var}(V) \right).$$

Comme $\text{Var}(\ell) = C_\mu(\ell, \ell)$, $\text{Var}(h^*) = \|h\|_\mu^2$ et $\text{Cov}(\ell, h^*) = \ell(h)$ (Corollaire 2.5), il vient :

$$\hat{\mu}_h(\ell) = \exp \left(-\frac{1}{2} C_\mu(\ell, \ell) + i\ell(h) + \frac{1}{2} \|h\|_\mu^2 - \frac{1}{2} \|h\|_\mu^2 \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} C_\mu(\ell, \ell) + i\ell(h) \right).$$

D'un autre côté, calculons la transformée de Fourier de la mesure translatée $T_h^* \mu$:

$$\widehat{T_h^* \mu}(\ell) = \int_{\mathcal{B}} \exp(i\ell(x)) (T_h^* \mu)(dx) = \int_{\mathcal{B}} \exp(i\ell(x+h)) \mu(dx) = e^{i\ell(h)} \int_{\mathcal{B}} \exp(i\ell(x)) \mu(dx).$$

En reconnaissant la transformée de Fourier de μ (Proposition 2.6), il vient :

$$\widehat{T_h^* \mu}(\ell) = \exp \left(-\frac{1}{2} C_\mu(\ell, \ell) + i\ell(h) \right).$$

Les transformées de Fourier étant identiques, l'unicité de la transformée de Fourier (Proposition 2.7) implique l'égalité des mesures $\mu_h = T_h^* \mu$, ce qui prouve le sens réciproque.

Montrons à présent le sens direct par contraposée en supposant que $h \notin \mathcal{H}_\mu$. D'après la caractérisation duale de la norme (Proposition 2.16), cela implique que $\|h\|_\mu = |h|_\mu = \infty$. Par conséquent, pour tout réel $n > 0$, il existe une forme linéaire $\ell \in \mathcal{B}^*$ normalisée par sa covariance ($C_\mu(\ell, \ell) = 1$) telle que $\ell(h) \geq n$.

Étudions les lois images de μ et $T_h^* \mu$ par cette forme ℓ . Sous μ , la variable $\ell(x)$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Par linéarité, la loi image de $T_h^* \mu$ par ℓ est celle de $\ell(x+h) = \ell(x) + \ell(h)$, à savoir la loi normale translatée $\mathcal{N}(\ell(h), 1)$.

La distance en variation totale entre les mesures globales majore la distance entre leurs projections : pour toute fonction borélienne test $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, la fonction $f = \phi \circ \ell : \mathcal{B} \rightarrow [-1, 1]$ est borélienne bornée avec $\|f\|_\infty \leq 1$, d'où par dualité (Définition 2.3) :

$$\|\mu - T_h^* \mu\|_{\text{TV}} \geq \|\ell^* \mu - \ell^*(T_h^* \mu)\|_{\text{TV}}.$$

Puisque $\ell^* \mu = \mathcal{N}(0, 1)$ et $\ell^*(T_h^* \mu) = \mathcal{N}(\ell(h), 1)$, l'inégalité devient d'après le calcul explicite de l'Exemple 4 :

$$\|\mu - T_h^* \mu\|_{\text{TV}} \geq \|\mathcal{N}(0, 1) - \mathcal{N}(\ell(h), 1)\|_{\text{TV}} = 2 \left(2\Phi \left(\frac{|\ell(h)|}{2} \right) - 1 \right),$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$. Comme $\ell(h) \geq n$ et que Φ est strictement croissante :

$$\|\mu - T_h^* \mu\|_{\text{TV}} \geq 2 \left(2\Phi \left(\frac{n}{2} \right) - 1 \right).$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n/2) = 1$, on obtient :

$$\|\mu - T_h^* \mu\|_{\text{TV}} = 2.$$

D'après le Corollaire 2.1, les mesures μ et $T_h^* \mu$ sont mutuellement étrangères. Par contraposée, si $T_h^* \mu$ est absolument continue par rapport à μ , alors nécessairement $h \in \mathcal{H}_\mu$. $\square$

Remarque 10 (Interprétation géométrique et portée pour les EDPS). *Ce résultat fondamental illustre la rigidité géométrique des probabilités en dimension infinie : pour une direction de translation $h \in \mathcal{B}$, il n'existe aucun régime intermédiaire entre l'équivalence et la singularité totale.*

- **Translations admissibles** ($h \in \mathcal{H}_\mu$) : Les éléments de l'espace de Cameron-Martin possèdent une forte régularité (typiquement une dérivée dans L^2 , comme dans l'espace H_0^1 pour le mouvement brownien). Le décalage h est d'énergie finie et reste donc indiscernable des fluctuations statistiques du bruit de fond. En théorie des EDPS, cette propriété est au cœur du théorème de Girsanov : elle garantit qu'un terme de force ou de dérive (drift) peut être absorbé par un changement de probabilité équivalente dès lors que ses réalisations appartiennent presque sûrement à l'espace de Cameron-Martin.
- **Directions singulières** ($h \notin \mathcal{H}_\mu$) : Dès que la direction h n'appartient pas à cet espace hilbertien privilégié, la mesure translatée devient immédiatement étrangère à la mesure originelle ($\|\mu - T_h^* \mu\|_{\text{TV}} = 2$). Il existe alors un ensemble borélien de mesure pleine pour μ dont la probabilité s'annule identiquement sous la mesure translatée, rendant tout changement de mesure absolument continu impossible.

Proposition 2.20. *L'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{B}$ s'exprime comme l'intersection :*

$$\mathcal{H}_\mu = \bigcap \{V \subset \mathcal{B} \text{ sous-espace vectoriel mesurable} : \mu(V) = 1\}.$$

De plus, dès que $\dim \mathcal{H}_\mu = \infty$, on a $\mu(\mathcal{H}_\mu) = 0$.

Démonstration. Étape 1 : Inclusion $\mathcal{H}_\mu \subset \bigcap \{V \subset \mathcal{B} : V \text{ s.e.v. mesurable, } \mu(V) = 1\}$.

Soit $V \subset \mathcal{B}$ un sous-espace vectoriel mesurable vérifiant $\mu(V) = 1$, et soit $h \in \mathcal{H}_\mu$.

Puisque $-h \in \mathcal{H}_\mu$, le théorème de Cameron-Martin garantit que la mesure translatée $T_{-h}^* \mu$ est absolument continue par rapport à μ ($T_{-h}^* \mu \ll \mu$). Comme $\mu(V) = 1$, son complémentaire vérifie $\mu(V^c) = 0$. Par continuité absolue, ce complémentaire est également négligeable sous la mesure translatée, soit $(T_{-h}^* \mu)(V^c) = 0$, ce qui impose :

$$(T_{-h}^* \mu)(V) = 1 - (T_{-h}^* \mu)(V^c) = 1.$$

Par ailleurs, par définition de la mesure image, $(T_{-h}^* \mu)(V) = \mu(T_{-h}^{-1}(V))$. Or, la pré-image de V par la translation $T_{-h} : x \mapsto x - h$ s'écrit :

$$T_{-h}^{-1}(V) = \{x \in \mathcal{B} : x - h \in V\} = V + h.$$

On a donc bien l'identité :

$$\mu(V + h) = (T_{-h}^* \mu)(V) = 1.$$

L'intersection de deux ensembles de mesure pleine étant de mesure pleine, il vient :

$$\mu(V \cap (V + h)) = 1 > 0.$$

En particulier, cet ensemble est non vide : il existe $y \in V$ tel que $y \in V + h$, ce qui signifie que $y = v + h$ pour un certain $v \in V$. La stabilité par combinaison linéaire de V assure alors :

$$h = y - v \in V.$$

Le vecteur h appartient donc à tout sous-espace vectoriel mesurable de mesure 1, ce qui établit l'inclusion $\mathcal{H}_\mu \subset \bigcap \{V \subset \mathcal{B} : V \text{ s.e.v. mesurable, } \mu(V) = 1\}$.

Étape 2 : Inclusion réciproque $\bigcap \{V \subset \mathcal{B} : V \text{ s.e.v. mesurable, } \mu(V) = 1\} \subset \mathcal{H}_\mu$.

Montrons l'inclusion réciproque par contraposée. Soit $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{H}_\mu$.

D'après la caractérisation duale de l'espace de Cameron-Martin (Proposition 2.16), on a $\|x\|_\mu = |x|_\mu = \infty$. Par définition du supremum, il existe pour chaque entier $n \geq 1$ une forme linéaire continue $\ell_n \in \mathcal{B}^*$ vérifiant $C_\mu(\ell_n, \ell_n) \leq 1$ et :

$$\ell_n(x) \geq n.$$

Considérons la fonctionnelle mesurable $q : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ définie par :

$$q(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ell_n(y)^2, \quad y \in \mathcal{B}.$$

Chaque forme ℓ_n étant continue, q est borélienne. En intégrant sous la mesure μ , le théorème de Fubini-Tonelli permet d'intervertir l'intégrale et la sommation :

$$\int_{\mathcal{B}} q(y) \mu(dy) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\mathcal{B}} \ell_n(y)^2 \mu(dy) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} C_\mu(\ell_n, \ell_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

L'intégrale étant finie, le sous-ensemble :

$$V = \{y \in \mathcal{B} \mid q(y) < \infty\}$$

est de mesure pleine, soit $\mu(V) = 1$. De plus, la sous-additivité de la norme ℓ^2 sur les suites réelles assure que V est stable par combinaison linéaire : c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

Or, pour le point x , la minoration des formes $\ell_n(x)$ donne :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ell_n(x)^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

On en déduit que $x \notin V$. Le point x n'appartenant pas à ce sous-espace vectoriel mesurable de mesure 1, il n'appartient pas à leur intersection commune, ce qui conclut la caractérisation par double inclusion.

Étape 3 : Nullité de la mesure en dimension infinie ($\mu(\mathcal{H}_\mu) = 0$).

Supposons que $\dim \mathcal{H}_\mu = \infty$. L'espace de Hilbert $\mathcal{R}_\mu$ étant séparable et de dimension infinie, il admet un système orthonormal $(e_n)_{n \geq 1}$.

D'après la Proposition 2.17, chaque élément e_n admet un représentant borélien $\hat{e}_n$ linéaire sur un sous-espace vectoriel de mesure pleine. Sur l'intersection dénombrable de ces sous-espaces (qui est encore de mesure 1), les variables aléatoires $(\hat{e}_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ car orthogonales dans $\mathcal{R}_\mu$.

1. *Divergence presque sûre du supremum des coordonnées :*

Pour tout entier $M \geq 1$, notons l'événement $A_M = \{x \in \mathcal{B} : \sup_{n \geq 1} |\hat{e}_n(x)| \leq M\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : |\hat{e}_n(x)| \leq M\}$. Par indépendance des variables gaussiennes centrées réduites $(\hat{e}_n)_{n \geq 1}$, on a pour tout entier $N \geq 1$:

$$\mu \left(\bigcap_{n=1}^N \{|\hat{e}_n| \leq M\} \right) = \prod_{n=1}^N \mu(|\hat{e}_n| \leq M) = (2\Phi(M) - 1)^N.$$

Puisque $2\Phi(M) - 1 < 1$, la continuité décroissante de la mesure le long de cette suite d'événements emboîtés lorsque $N \rightarrow \infty$ donne :

$$\mu(A_M) = \lim_{N \rightarrow \infty} (2\Phi(M) - 1)^N = 0.$$

L'ensemble des points pour lesquels la suite des coordonnées $(\hat{e}_n(x))_{n \geq 1}$ est bornée s'écrit comme la réunion dénombrable $\bigcup_{M=1}^{\infty} A_M$. Par sous-additivité dénombrable de μ :

$$\mu \left(\sup_{n \geq 1} |\hat{e}_n| < +\infty \right) = \mu \left(\bigcup_{M=1}^{\infty} A_M \right) \leq \sum_{M=1}^{\infty} \mu(A_M) = 0.$$

Le complémentaire est donc de mesure pleine :

$$\sup_{n \geq 1} |\hat{e}_n(x)| = +\infty \quad \mu\text{-presque sûrement.}$$

2. Majoration uniforme par la norme de Cameron-Martin : D'après la caractérisation duale (Proposition 2.16), par symétrie de la boule unité de covariance, toute forme $\ell \in \mathcal{B}^*$ vérifiant $\|\ell\|_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} \leq 1$ satisfait immédiatement :

$$|\ell(x)| \leq \|x\|_{\mu}, \quad \forall x \in \mathcal{B}.$$

Soit $n \geq 1$. Puisque $\|e_n\|_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = 1$, il existe par densité de $\mathcal{B}^*$ dans $\mathcal{R}_{\mu}$ une suite de formes $(\ell_{n,k})_{k \geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ satisfaisant $\|\ell_{n,k}\|_{L^2} \leq 1$ et convergeant μ -presque partout vers $\hat{e}_n$ quand $k \rightarrow \infty$.

Pour tout $k \geq 1$, l'inégalité $|\ell_{n,k}(x)| \leq \|x\|_{\mu}$ a lieu partout sur $\mathcal{B}$. En passant à la limite simple $k \rightarrow \infty$, l'inégalité large est préservée sur le domaine de convergence :

$$|\hat{e}_n(x)| \leq \|x\|_{\mu} \quad \mu\text{-presque sûrement.}$$

Par intersection dénombrable d'ensembles de mesure 1, cette majoration est vérifiée simultanément pour tout $n \geq 1$ en dehors d'un ensemble négligeable :

$$\sup_{n \geq 1} |\hat{e}_n(x)| \leq \|x\|_{\mu} \quad \mu\text{-presque sûrement.}$$

3. Conclusion :

En combinant les deux points précédents, on obtient immédiatement :

$$+\infty = \sup_{n \geq 1} |\hat{e}_n(x)| \leq \|x\|_{\mu} \quad \mu\text{-presque sûrement.}$$

On a donc $\|x\|_{\mu} = +\infty$ μ -presque partout. Comme $\mathcal{H}_{\mu}$ est un borélien d'après le Corollaire 2.6 et qu'il est inclus dans l'ensemble négligeable $\{x \in \mathcal{B} : \|x\|_{\mu} < \infty\}$, la mesure $\mu(\mathcal{H}_{\mu})$ est bien définie et vérifie rigoureusement $\mu(\mathcal{H}_{\mu}) = 0$. $\square$

Remarque 11. Ce résultat illustre le passage de l'analyse fonctionnelle à la théorie des probabilités. L'espace $\mathcal{R}_{\mu}$ étant l'adhérence de $\mathcal{B}^*$ dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$, les formes linéaires déterministes $\ell \in \mathcal{B}^*$ s'interprètent comme des variables aléatoires gaussiennes dont la variance vaut $C_{\mu}(\ell, \ell)$.

Sur le plan géométrique, l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_{\mu}$ ne contient que des éléments possédant une régularité élevée. En revanche, les trajectoires aléatoires typiques générées par la mesure μ sont intrinsèquement rugueuses et non dérivables. Le fait que $\mu(\mathcal{H}_{\mu}) = 0$ traduit le fait que ces oscillations trajectorielles infinies font systématiquement exploser la norme $\|x\|_{\mu}$.

Images des mesures Gaussiennes

Cette section étudie l'action d'applications mesurables et d'opérateurs linéaires sur les mesures gaussiennes, ainsi que leurs mesures images.

Ce point est fondamental pour l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS). En effet, nous venons d'établir que la mesure est concentrée hors de son espace de Cameron-Martin ($\mu(\mathcal{H}_{\mu}) = 0$) : un opérateur déterministe A défini sur l'espace régulier $\mathcal{H}_{\mu}$ ne peut donc pas être appliqué directement aux trajectoires rugueuses du bruit, qui vivent dans $\mathcal{B} \setminus \mathcal{H}_{\mu}$. L'objectif est de montrer que l'on peut prolonger de façon mesurable ces opérateurs

à un sous-espace de mesure pleine de $\mathcal{B}$, condition préalable à la construction du mouvement brownien cylindrique et de l'intégration stochastique au chapitre suivant.

En dimension infinie, l'existence d'un tel prolongement et la régularité de la mesure image dépendent étroitement de la compacité de l'opérateur considéré. Pour mener à bien cette construction, il convient d'introduire au préalable la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Définition 2.12. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables. Un opérateur linéaire borné $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ est dit de Hilbert-Schmidt si pour une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{H}_1$, la quantité suivante est finie :

$$\|T\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 < \infty.$$

Cette quantité est indépendante du choix de la base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$. L'ensemble de ces opérateurs, noté $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle T, S \rangle_{\text{HS}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, Se_n \rangle_{\mathcal{H}_2}$ (admis).

Remarque 12. Cette caractérisation est fondamentale car elle fait le pont avec la notion d'opérateur à trace. En effet, un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est de Hilbert-Schmidt si et seulement si l'opérateur auto-adjoint positif associé $TT^*: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ (ou $T^*T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$) est un opérateur à trace. On a alors l'identité sur les normes :

$$\|T\|_{\text{HS}}^2 = \text{tr}(TT^*) = \text{tr}(T^*T).$$

Théorème 2.5. Soit μ une mesure de probabilité gaussienne centrée sur un espace de Banach séparable $\mathcal{B}$, et notons $\mathcal{H}_\mu$ son espace de Cameron-Martin associé. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $A: \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Alors, il existe un sous-espace vectoriel mesurable V vérifiant $\mathcal{H}_\mu \subset V \subset \mathcal{B}$ avec $\mu(V) = 1$, et une application mesurable $\hat{A}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$ dont la restriction à V est linéaire et prolonge A (c'est-à-dire $\hat{A}h = Ah$ pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$). De plus, la mesure image $\nu = \hat{A}^*\mu$ est une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{H}$ dont la forme de covariance est donnée pour tous $h, k \in \mathcal{H}$ par :

$$C_\nu(h, k) = \langle A^*h, A^*k \rangle_\mu = \langle AA^*h, k \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Démonstration. Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base orthonormée de l'espace hilbertien $\mathcal{H}_\mu$. Pour chaque $n \geq 1$, posons $e_n^* = \Psi_\mu(e_n) \in \mathcal{R}_\mu \subset L^2(\mathcal{B}, \mu)$ son image par l'isomorphisme isométrique de Cameron-Martin (Proposition 2.14).

D'après la Proposition 2.17 et sa preuve, il existe pour chaque $n \geq 1$ une suite de formes linéaires continues $(\ell_{n,k})_{k \geq 1} \subset \mathcal{B}^*$ convergeant vers e_n^* dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$, un sous-espace vectoriel mesurable de mesure pleine $V_{e_n} \subset \mathcal{B}$, et une forme linéaire $\hat{e}_n: V_{e_n} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la limite simple $\hat{e}_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \ell_{n,k}(x)$, vérifiant $\hat{e}_n = e_n^*$ μ -presque partout.

Posons $V_0 = \bigcap_{n \geq 1} V_{e_n}$. En tant qu'intersection dénombrable de sous-espaces vectoriels boréliens de mesure 1, V_0 est un sous-espace vectoriel borélien vérifiant $\mu(V_0) = 1$. Pour tout $x \in V_0$ et tout $N \geq 1$, on peut alors définir ponctuellement la somme partielle :

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \hat{e}_n(x) A e_n.$$

Définissons l'ensemble $V \subset V_0$ par :

$$V = \{x \in V_0 \mid \text{la suite } (S_N(x))_{N \geq 1} \text{ converge dans } \mathcal{H}\}.$$

L'espace $\mathcal{H}$ étant complet, la convergence d'une suite équivaut au critère de Cauchy :

$$V = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcap_{N, M' \geq M} \left\{ x \in V_0 \mid \|S_N(x) - S_{M'}(x)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{p} \right\}.$$

Chaque application $x \mapsto \|S_N(x) - S_{M'}(x)\|_{\mathcal{H}}$ étant borélienne sur V_0 , V est un borélien de $\mathcal{B}$. De plus, la linéarité de chaque forme $\hat{e}_n$ sur V_0 et la linéarité des limites dans $\mathcal{H}$ assurent que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

Étape 1 : Inclusion de l'espace de Cameron-Martin ($\mathcal{H}_\mu \subset V$).

Soit $h \in \mathcal{H}_\mu$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$, la propriété reproduisante (Corollaire 2.5) donne l'égalité :

$$\ell_{n,k}(h) = \langle \Psi_\mu(h), \ell_{n,k} \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)}.$$

Comme $\ell_{n,k} \rightarrow e_n^* = \Psi_\mu(e_n)$ dans $L^2(\mathcal{B}, \mu)$, la continuité du produit scalaire et l'isométrie Ψ_μ (Proposition 2.14) donnent :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ell_{n,k}(h) = \langle \Psi_\mu(h), \Psi_\mu(e_n) \rangle_{L^2(\mathcal{B}, \mu)} = \langle h, e_n \rangle_\mu.$$

Cette limite existant dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $h \in V_{e_n}$ pour tout $n \geq 1$ (donc $h \in V_0$), et que l'évaluation satisfait rigoureusement :

$$\hat{e}_n(h) = \langle h, e_n \rangle_\mu.$$

Dès lors, comme $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}_\mu$, la somme partielle s'écrit $S_N(h) = \sum_{n=1}^N \langle h, e_n \rangle_\mu A e_n = A(\sum_{n=1}^N \langle h, e_n \rangle_\mu e_n)$. Tout opérateur de Hilbert-Schmidt étant borné ($\|A\|_{\mathcal{L}} \leq \|A\|_{\text{HS}}$), la continuité de A implique :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(h) = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle_\mu e_n \right) = Ah \quad \text{dans } \mathcal{H}.$$

La suite $(S_N(h))_{N \geq 1}$ convergeant dans $\mathcal{H}$, on conclut que $h \in V$, et donc que $\mathcal{H}_\mu \subset V$.

Étape 2 : Définition de l'application $\hat{A}$.

On définit l'application $\hat{A}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$ par :

$$\hat{A}(x) = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) & \text{si } x \in V, \\ 0 & \text{si } x \notin V. \end{cases}$$

En tant que limite simple sur le borélien V d'applications mesurables S_N à valeurs dans l'espace polonais $\mathcal{H}$, l'application $\hat{A}$ est $\mathcal{B}(\mathcal{B})$ -mesurable. Sa restriction à V est linéaire par passage à la limite de sommes linéaires, et sa restriction à $\mathcal{H}_\mu$ vérifie $\hat{A}h = Ah$ pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$.

Étape 3 : Mesure pleine du domaine ($\mu(V) = 1$).

D'après la Proposition 2.18, chaque variable aléatoire $e_n^* = \Psi_\mu(e_n)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \|e_n\|_\mu^2) = \mathcal{N}(0, 1)$ sous μ . De plus, la covariance croisée entre deux coordonnées vérifie :

$$\mathbb{E}_\mu[e_n^* e_m^*] = \langle e_n, e_m \rangle_\mu = \delta_{n,m}.$$

La famille $(e_n^*)_{n \geq 1}$ vivant dans l'espace fermé $\mathcal{R}_\mu$, les coordonnées gaussiennes sont mutuellement indépendantes. Comme $\hat{e}_n = e_n^*$ μ -p.s. (Proposition 2.17), $(\hat{e}_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées selon $\mathcal{N}(0, 1)$.

La suite des sommes partielles $(S_N)_{N \geq 1}$ est donc une martingale à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, adaptée à la filtration naturelle engendrée par les $(\hat{e}_n)_{n \geq 1}$. Par orthogonalité des accroissements $(\hat{e}_n A e_n)_{n \geq 1}$ dans $L^2(\mathcal{B}, \mu; \mathcal{H})$ et indépendance, on a pour tout $N \geq 1$:

$$\mathbb{E}_\mu [\|S_N\|_{\mathcal{H}}^2] = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}_\mu [\hat{e}_n^2] \|A e_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^N \|A e_n\|_{\mathcal{H}}^2.$$

L'opérateur A étant de Hilbert-Schmidt (Définition 2.12), cette somme converge vers $\|A\|_{\text{HS}}^2 < \infty$ lorsque $N \rightarrow \infty$. La suite $(S_N)_{N \geq 1}$ est par conséquent une martingale bornée dans $L^2(\mathcal{B}, \mu; \mathcal{H})$. D'après le théorème de convergence des martingales dans un espace de Hilbert, la suite $(S_N(x))_{N \geq 1}$ converge dans $\mathcal{H}$ pour μ -presque tout $x \in \mathcal{B}$, ce qui garantit $\mu(V) = 1$.

Étape 4 : Caractérisation de la mesure image $\nu = \hat{A}^* \mu$.

Pour déterminer la loi de la mesure image $\nu = \hat{A}^* \mu$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, calculons sa transformée de Fourier. En identifiant $\mathcal{H}$ à son dual topologique, la définition de la mesure image donne pour tout $h \in \mathcal{H}$:

$$\hat{\nu}(h) = \int_{\mathcal{H}} \exp(i \langle h, v \rangle_{\mathcal{H}}) \nu(dv) = \int_{\mathcal{B}} \exp(i \langle h, \hat{A}(x) \rangle_{\mathcal{H}}) \mu(dx).$$

Pour tout $x \in V$, par continuité du produit scalaire dans $\mathcal{H}$ et par définition de l'opérateur adjoint hilbertien $A^*: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\mu$, on a :

$$\langle h, \hat{A}(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \hat{e}_n(x) \langle h, A e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \hat{e}_n(x) \langle A^* h, e_n \rangle_\mu.$$

Pour chaque entier $N \geq 1$, la variable réelle $f_N(x) = \sum_{n=1}^N \hat{e}_n(x) \langle A^*h, e_n \rangle_\mu$ est une combinaison linéaire finie de gaussiennes réelles indépendantes centrées et réduites : elle suit donc une loi normale centrée sur $\mathbb{R}$, de variance :

$$\sigma_N^2 = \mathbb{E}_\mu[f_N^2] = \sum_{n=1}^N \langle A^*h, e_n \rangle_\mu^2.$$

Sa transformée de Fourier vaut donc $\mathbb{E}_\mu[\exp(if_N)] = \exp(-\frac{1}{2}\sigma_N^2)$. Comme $f_N(x) \rightarrow \langle h, \hat{A}(x) \rangle_{\mathcal{H}}$ pour μ -presque tout $x \in \mathcal{B}$ et que $|\exp(if_N(x))| \leq 1 \in L^1(\mathcal{B}, \mu)$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet d'intervertir la limite et l'intégrale :

$$\hat{\nu}(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{B}} \exp(if_N(x)) \mu(dx) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_N^2\right).$$

Par l'identité de Parseval dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\mu$ sur la base orthonormée $(e_n)_{n \geq 1}$, la suite des variances converge vers :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A^*h, e_n \rangle_\mu^2 = \|A^*h\|_\mu^2 = \langle A^*h, A^*h \rangle_\mu = \langle AA^*h, h \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Il s'ensuit que pour tout vecteur test $h \in \mathcal{H}$:

$$\hat{\nu}(h) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle A^*h, A^*h \rangle_\mu\right).$$

D'après la Proposition 2.6, la mesure image ν est une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{H}$, dont la forme de covariance s'obtient pour tous $h, k \in \mathcal{H}$ par polarisation de la forme quadratique :

$$C_\nu(h, k) = \langle A^*h, A^*k \rangle_\mu = \langle AA^*h, k \rangle_{\mathcal{H}}.$$

□

Ce théorème est la clé pour donner un sens au mouvement brownien cylindrique et à l'intégration stochastique. En effet, l'opérateur déterministe A (comme le résolvant du Laplacien) n'est défini que sur l'espace de fonctions lisses $\mathcal{H}_\mu$. Or, le bruit vit dans l'espace global $\mathcal{B}$, beaucoup plus grand et rugueux. On prouve donc qu'on peut prolonger proprement A en un opérateur $\hat{A}$ capable d'agir sur le bruit de fond rugueux.

Proposition 2.21. *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux espaces de Banach séparables et soit μ une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{B}_1$ d'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$. Soit $A: \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{B}_2$ un opérateur linéaire borné.*

S'il existe une mesure gaussienne centrée ν sur $\mathcal{B}_2$ dont l'opérateur de covariance vérifie pour toutes formes linéaires $\ell, \ell' \in \mathcal{B}_2^*$:

$$C_\nu(\ell, \ell') = \langle A^*\ell, A^*\ell' \rangle_\mu,$$

où $A^*: \mathcal{B}_2^* \rightarrow \mathcal{H}_\mu$ désigne l'opérateur adjoint défini par $\langle A^*\ell, h \rangle_\mu = \ell(Ah)$ pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$, alors il existe :

- 1. un sous-espace vectoriel mesurable $V \subset \mathcal{B}_1$ vérifiant $\mathcal{H}_\mu \subset V$ et $\mu(V) = 1$;*
- 2. une application mesurable $\hat{A}: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ dont la restriction à V est linéaire et prolonge A (soit $\hat{A}h = Ah$ pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$) ;*

telle que la mesure image vérifie $\nu = \hat{A}^*\mu$.

Démonstration. La démarche repose sur la construction d'un plongement hilbertien continu et injectif de $\mathcal{B}_2$, permettant de ramener l'opérateur A au cadre de Hilbert-Schmidt traité par le Théorème 2.5.

Étape 1 : Construction du plongement hilbertien injectif.

L'espace de Banach $\mathcal{B}_2$ étant séparable, la boule unité fermée de son dual topologique $\mathcal{B}_2^*$ est métrisable et compacte pour la topologie faible-* (théorème de Banach-Alaoglu), donc séparable. Il existe donc une suite dénombrable $(g_k^*)_{k \geq 1} \subset \mathcal{B}_2^*$ normalisée ($\|g_k^*\|_{\mathcal{B}_2^*} = 1$) qui sépare les points de $\mathcal{B}_2$:

$$\forall y \in \mathcal{B}_2, \quad (g_k^*(y) = 0, \forall k \geq 1) \implies y = 0.$$

Par le théorème de Fernique (Théorème 2.3), le moment d'ordre deux de la mesure gaussienne ν est fini :

$$M_2 = \int_{\mathcal{B}_2} \|y\|_{\mathcal{B}_2}^2 \nu(dy) < \infty.$$

Définissons sur $\mathcal{B}_2$ la forme quadratique suivante :

$$\|y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^*(y)^2}{2^k(1+M_2)}, \quad \forall y \in \mathcal{B}_2.$$

Puisque $|g_k^*(y)| \leq \|g_k^*\|_{\mathcal{B}_2^*} \|y\|_{\mathcal{B}_2} = \|y\|_{\mathcal{B}_2}$, on a la majoration uniforme :

$$\|y\|_2^2 \leq \|y\|_{\mathcal{B}_2}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k(1+M_2)} \leq \|y\|_{\mathcal{B}_2}^2 < \infty.$$

De plus, si $\|y\|_2 = 0$, la positivité de chaque terme impose $g_k^*(y) = 0$ pour tout $k \geq 1$, d'où $y = 0$ par séparation des points. L'application $\|\cdot\|_2$ définit donc une norme pré-hilbertienne continue sur $\mathcal{B}_2$.

Notons $\mathcal{H}_2$ le complété hilbertien de $\mathcal{B}_2$ pour cette norme, et $\iota: \mathcal{B}_2 \hookrightarrow \mathcal{H}_2$ l'injection canonique continue associée. Par construction, ι est linéaire continue, injective et à image dense. L'espace $\mathcal{B}_2$ étant séparable, $\mathcal{H}_2$ est un espace de Hilbert séparable.

Étape 2 : Caractère Hilbert-Schmidt de l'opérateur composé.

Considérons l'opérateur linéaire $A' = \iota \circ A: \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_2$. Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne orthonormée de l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$. Par définition de la norme de Hilbert-Schmidt et de la norme sur $\mathcal{H}_2$:

$$\|A'\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A'e_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^*(Ae_n)^2}{2^k(1+M_2)}.$$

Tous les termes étant positifs, le théorème de Fubini-Tonelli autorise l'intervention des sommations :

$$\|A'\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k(1+M_2)} \sum_{n=1}^{\infty} g_k^*(Ae_n)^2.$$

Pour tout $k \geq 1$, la définition de l'opérateur adjoint A^* donne $g_k^*(Ae_n) = \langle A^*g_k^*, e_n \rangle_\mu$. L'identité de Parseval dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\mu$ fournit alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_k^*(Ae_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A^*g_k^*, e_n \rangle_\mu^2 = \|A^*g_k^*\|_\mu^2 = \langle A^*g_k^*, A^*g_k^* \rangle_\mu.$$

Par hypothèse sur la covariance de ν , cette quantité coïncide avec la variance de g_k^* sous ν :

$$\|A^*g_k^*\|_\mu^2 = C_\nu(g_k^*, g_k^*) = \int_{\mathcal{B}_2} g_k^*(y)^2 \nu(dy) \leq \|g_k^*\|_{\mathcal{B}_2^*}^2 \int_{\mathcal{B}_2} \|y\|_{\mathcal{B}_2}^2 \nu(dy) = M_2.$$

En réinjectant cette estimation dans la sommation double :

$$\|A'\|_{\text{HS}}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_2}{2^k(1+M_2)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty.$$

L'opérateur $A': \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_2$ est donc un opérateur de Hilbert-Schmidt entre espaces de Hilbert séparables.

Étape 3 : Application du Théorème 2.5 dans $\mathcal{H}_2$.

D'après le Théorème 2.5, il existe un sous-espace vectoriel mesurable $V_1 \subset \mathcal{B}_1$ vérifiant $\mathcal{H}_\mu \subset V_1$ et $\mu(V_1) = 1$, ainsi qu'une application mesurable $\hat{A}': \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ linéaire sur V_1 telle que :

$$\hat{A}'h = A'h = \iota(Ah), \quad \forall h \in \mathcal{H}_\mu,$$

et dont la mesure image $\nu' = (\hat{A}')^*\mu$ est la mesure gaussienne sur $\mathcal{H}_2$ de transformée de Fourier donnée pour tout $u \in \mathcal{H}_2$ par :

$$\widehat{(\hat{A}')^*\mu}(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|(A')^*u\|_\mu^2\right).$$

Considérons parallèlement la mesure image $\iota^*\nu$ sur $\mathcal{H}_2$. Pour tout vecteur $u \in \mathcal{H}_2$, sa transformée de Fourier s'exprime par :

$$\widehat{\iota^*\nu}(u) = \int_{\mathcal{H}_2} \exp(i\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_2}) (\iota^*\nu)(dv) = \int_{\mathcal{B}_2} \exp(i\langle u, \iota(y) \rangle_{\mathcal{H}_2}) \nu(dy).$$

L'application $y \mapsto \langle u, \iota(y) \rangle_{\mathcal{H}_2}$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}_2$, notée $\ell_u \in \mathcal{B}_2^*$ (autrement dit $\ell_u = \iota^*u$). Comme ν est une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{B}_2$, la variable $\ell_u(y)$ suit une loi normale centrée de variance $C_\nu(\ell_u, \ell_u)$. Par ailleurs, pour tout vecteur $h \in \mathcal{H}_\mu$, la définition des opérateurs adjoints donne :

$$\langle A^* \ell_u, h \rangle_\mu = \ell_u(Ah) = \langle u, \iota(Ah) \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle u, A'h \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle (A')^* u, h \rangle_\mu,$$

ce qui impose $A^* \ell_u = (A')^* u$ dans $\mathcal{H}_\mu$. Par conséquent, l'hypothèse sur la covariance de ν fournit :

$$C_\nu(\ell_u, \ell_u) = \|A^* \ell_u\|_\mu^2 = \|(A')^* u\|_\mu^2.$$

Il s'ensuit que pour tout $u \in \mathcal{H}_2$, $\widehat{(A')^* \mu}(u) = \exp(-\frac{1}{2} \|(A')^* u\|_\mu^2) = \widehat{\iota^* \nu}(u)$. Par injectivité de la transformée de Fourier sur l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}_2$ (Proposition 2.7), on en déduit l'égalité des mesures images sur $\mathcal{H}_2$:

$$(\hat{A}')^* \mu = \iota^* \nu.$$

Étape 4 : Retour dans l'espace de Banach $\mathcal{B}_2$ et régularité borélienne.

Puisque $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{H}_2$ sont des espaces polonais et que l'application linéaire $\iota : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ est continue et injective, le théorème de Lusin-Souslin assure que l'image $\iota(\mathcal{B}_2)$ est un borélien de $\mathcal{H}_2$, et que l'application réciproque $\iota^{-1} : \iota(\mathcal{B}_2) \rightarrow \mathcal{B}_2$ est borélienne.

Par ailleurs, comme $\nu(\mathcal{B}_2) = 1$, la définition de la mesure image et l'injectivité de ι donnent :

$$\mu\left((\hat{A}')^{-1}(\iota(\mathcal{B}_2))\right) = ((\hat{A}')^* \mu)(\iota(\mathcal{B}_2)) = (\iota^* \nu)(\iota(\mathcal{B}_2)) = \nu(\iota^{-1}(\iota(\mathcal{B}_2))) = \nu(\mathcal{B}_2) = 1.$$

Définissons alors le sous-ensemble :

$$V = V_1 \cap (\hat{A}')^{-1}(\iota(\mathcal{B}_2)) = \left\{x \in V_1 \mid \hat{A}'(x) \in \iota(\mathcal{B}_2)\right\}.$$

Vérifions les propriétés de V :

- **Mesurabilité et mesure pleine** : En tant qu'intersection de deux boréliens de μ -mesure 1, $V \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_1)$ et vérifie $\mu(V) = 1$.
- **Structure d'espace vectoriel** : $\iota(\mathcal{B}_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_2$. La restriction de $\hat{A}'$ à V_1 étant linéaire, l'image réciproque $(\hat{A}')^{-1}(\iota(\mathcal{B}_2)) \cap V_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}_1$.
- **Inclusion de $\mathcal{H}_\mu$** : Pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu \subset V_1$, on a $\hat{A}'(h) = \iota(Ah) \in \iota(\mathcal{B}_2)$. On en déduit que $h \in V$, d'où $\mathcal{H}_\mu \subset V$.

Étape 5 : Définition et vérification de l'application $\hat{A}$.

On définit l'application $\hat{A} : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ par :

$$\hat{A}(x) = \begin{cases} \iota^{-1}(\hat{A}'(x)) & \text{si } x \in V, \\ 0 & \text{si } x \notin V. \end{cases}$$

L'application $\iota^{-1} : \iota(\mathcal{B}_2) \rightarrow \mathcal{B}_2$ et l'opérateur $\hat{A}'$ étant mesurables, $\hat{A}$ est une application mesurable de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_2$.

Sur le sous-espace V , $\hat{A}$ est linéaire comme composition des applications linéaires $\hat{A}'$ et ι^{-1} . De plus, pour tout vecteur $h \in \mathcal{H}_\mu$, on a :

$$\hat{A}h = \iota^{-1}(\hat{A}'h) = \iota^{-1}(\iota(Ah)) = Ah,$$

ce qui confirme que $\hat{A}$ prolonge fidèlement l'opérateur A sur $\mathcal{H}_\mu$.

Enfin, vérifions la loi de la mesure image $\hat{A}^* \mu$. Pour tout borélien $E \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_2)$, l'ensemble $\iota(E)$ est borélien dans $\mathcal{H}_2$ d'après le théorème de Lusin-Souslin. La pré-image s'exprime presque sûrement par :

$$\hat{A}^{-1}(E) \cap V = (\hat{A}')^{-1}(\iota(E)) \cap V.$$

Comme $\mu(V) = 1$, il vient :

$$(\hat{A}^* \mu)(E) = \mu(\hat{A}^{-1}(E)) = \mu((\hat{A}')^{-1}(\iota(E))) = ((\hat{A}')^* \mu)(\iota(E)).$$

Puisque $(\hat{A}')^* \mu = \iota^* \nu$ et que ι est injective ($\iota^{-1}(\iota(E)) = E$), on conclut :

$$(\hat{A}^* \mu)(E) = (\iota^* \nu)(\iota(E)) = \nu(\iota^{-1}(\iota(E))) = \nu(E),$$

ce qui établit l'identité $\hat{A}^* \mu = \nu$ et achève la démonstration. □

Théorème 2.6 (Unicité du prolongement mesurable, voir Hairer [7, Théorème 3.73]). *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux espaces de Banach séparables, μ une mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{B}_1$ d'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$, et soit $A: \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{B}_2$ un opérateur linéaire borné vérifiant les hypothèses de la proposition 2.21.*

Alors, le prolongement linéaire et mesurable $\hat{A}: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ de A est unique à modification μ -presque sûre près : si $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sont deux prolongements mesurables satisfaisant les conclusions de la proposition 2.21, on a

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \mu\text{-presque sûrement.}$$

Démonstration. La démonstration s'articule en cinq étapes : identification du sous-espace de linéarité commun, appartenance des projections scalaires à l'espace hilbertien $\mathcal{R}_\mu$, identification rigoureuse du représentant de Riesz via la formule de Cameron-Martin, annulation scalaire presque sûre, puis conclusion par séparabilité du dual.

Étape 1 : Linéarité de la différence sur un sous-espace de mesure pleine.

Soient $\hat{A}_1, \hat{A}_2: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ deux prolongements mesurables de A satisfaisant les conclusions de la proposition 2.21. Par définition, il existe pour chaque $i \in \{1, 2\}$ un sous-espace vectoriel mesurable $V_i \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_1)$ vérifiant $\mu(V_i) = 1$, $\mathcal{H}_\mu \subset V_i$, tel que la restriction $\hat{A}_i|_{V_i}$ soit linéaire et $\hat{A}_i h = Ah$ pour tout $h \in \mathcal{H}_\mu$.

Posons $V = V_1 \cap V_2$. En tant qu'intersection finie de sous-espaces vectoriels boréliens de mesure 1, V est un sous-espace vectoriel mesurable vérifiant $\mu(V) = 1$ et $\mathcal{H}_\mu \subset V$. Définissons l'application différence $\Delta: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ par :

$$\Delta(x) = \hat{A}_2(x) - \hat{A}_1(x).$$

Par linéarité de $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ sur V , l'application Δ est linéaire sur V . De plus, comme $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ coïncident avec A sur l'espace de Cameron-Martin, sa restriction à $\mathcal{H}_\mu$ est identiquement nulle :

$$\Delta h = \hat{A}_2 h - \hat{A}_1 h = Ah - Ah = 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}_\mu.$$

Étape 2 : Appartenance des projections scalaires à l'espace $\mathcal{R}_\mu$.

Soit $\ell \in \mathcal{B}_2^*$ une forme linéaire continue fixée. Rappelons que l'espace hilbertien gaussien associé est défini par $\mathcal{R}_\mu = \overline{\mathcal{B}_1^*}^{L^2(\mathcal{B}_1, \mu)}$.

Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, la projection $\ell \circ \hat{A}_i$ s'obtient par construction comme la limite dans $L^2(\mathcal{B}_1, \mu)$ de combinaisons linéaires des variables coordonnées $\hat{e}_n \in \mathcal{R}_\mu$ (Proposition 2.17). L'espace hilbertien gaussien $\mathcal{R}_\mu$ étant fermé dans $L^2(\mathcal{B}_1, \mu)$, cette limite appartient nécessairement à $\mathcal{R}_\mu$. On a donc $\ell \circ \hat{A}_1 \in \mathcal{R}_\mu$ et $\ell \circ \hat{A}_2 \in \mathcal{R}_\mu$.

Par stabilité de $\mathcal{R}_\mu$ par combinaison linéaire, la variable aléatoire réelle $X: V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$X(x) = \ell(\Delta x) = (\ell \circ \hat{A}_2)(x) - (\ell \circ \hat{A}_1)(x),$$

appartient à l'espace de Hilbert $\mathcal{R}_\mu$. En particulier, X est une variable aléatoire gaussienne centrée de carré intégrable sous μ ($\mathbb{E}_\mu[X] = 0$).

Étape 3 : Identification du représentant de Riesz $h_X \in \mathcal{H}_\mu$ via Cameron-Martin.

L'application $\Psi_\mu: \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{R}_\mu$ étant un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert (Proposition 2.14), il existe un unique vecteur $h_X \in \mathcal{H}_\mu$ tel que $\Psi_\mu(h_X) = X$. L'isométrie assure en outre que :

$$\mathbb{E}_\mu[(\ell(\Delta x))^2] = \|X\|_{L^2(\mathcal{B}_1, \mu)}^2 = \|h_X\|_\mu^2.$$

Pour déterminer h_X , exploitons l'action des translations sur le sous-espace de linéarité V . Soit $k \in \mathcal{H}_\mu \subset V$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in V$, la linéarité de Δ sur V entraîne par composition avec ℓ :

$$X(x + tk) = X(x) + tX(k).$$

Puisque $\mu(V) = 1$ et que X est centrée sous μ ($\mathbb{E}_\mu[X] = 0$), l'intégration par rapport à μ donne :

$$\mathbb{E}_\mu[X(x + tk)] = \mathbb{E}_\mu[X(x)] + tX(k) = tX(k).$$

D'autre part, d'après le théorème de Cameron-Martin (Théorème 2.4), la mesure translatée $T_{tk}^* \mu$ admet pour densité de Radon-Nikodym par rapport à μ la fonctionnelle :

$$\frac{d(T_{tk}^* \mu)}{d\mu}(x) = \exp \left(t\Psi_\mu(k)(x) - \frac{t^2}{2} \|k\|_\mu^2 \right).$$

Cette espérance s'exprime donc également sous la forme :

$$\mathbb{E}_\mu[X(x + tk)] = \int_{\mathcal{B}_1} X(x) \exp\left(t\Psi_\mu(k)(x) - \frac{t^2}{2}\|k\|_\mu^2\right) \mu(dx).$$

Dérivons cette relation par rapport au paramètre réel t en $t = 0$. Pour tout $t \in [-1, 1]$, la dérivée de l'intégrande par rapport à t est majorée en valeur absolue par :

$$|X(x)| (|\Psi_\mu(k)(x)| + \|k\|_\mu^2) \exp(|\Psi_\mu(k)(x)|).$$

Comme $X \in L^2(\mathcal{B}_1, \mu)$ et que la variable $(|\Psi_\mu(k)| + \|k\|_\mu^2) \exp(|\Psi_\mu(k)|)$ est de carré intégrable sous la mesure gaussienne μ par intégrabilité exponentielle (Théorème 2.3), l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que cette borne supérieure appartient à $L^1(\mathcal{B}_1, \mu)$. Le théorème de dérivation sous le signe intégral de Lebesgue s'applique donc et donne :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbb{E}_\mu[X(x + tk)] = \int_{\mathcal{B}_1} X(x) \Psi_\mu(k)(x) \mu(dx) = \langle X, \Psi_\mu(k) \rangle_{L^2(\mathcal{B}_1, \mu)}.$$

En confrontant les deux expressions de la dérivée en $t = 0$, on obtient pour tout $k \in \mathcal{H}_\mu$:

$$X(k) = \langle X, \Psi_\mu(k) \rangle_{L^2(\mathcal{B}_1, \mu)}.$$

Puisque $\Psi_\mu : \mathcal{H}_\mu \rightarrow \mathcal{R}_\mu$ est une isométrie et que $X = \Psi_\mu(h_X)$, le produit scalaire L^2 se réécrit dans $\mathcal{H}_\mu$:

$$X(k) = \langle \Psi_\mu(h_X), \Psi_\mu(k) \rangle_{L^2(\mathcal{B}_1, \mu)} = \langle h_X, k \rangle_\mu, \quad \forall k \in \mathcal{H}_\mu.$$

Étape 4 : Annulation scalaire presque sûre.

D'après l'étape 1, l'application Δ s'annule identiquement sur l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_\mu$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathcal{H}_\mu$:

$$X(k) = \ell(\Delta k) = \ell(0) = 0.$$

L'identité établie à l'étape 3 impose donc :

$$\langle h_X, k \rangle_\mu = 0, \quad \forall k \in \mathcal{H}_\mu.$$

En choisissant en particulier le vecteur test $k = h_X \in \mathcal{H}_\mu$, la définie-positivité du produit scalaire entraîne :

$$\|h_X\|_\mu^2 = \langle h_X, h_X \rangle_\mu = 0 \implies h_X = 0.$$

L'isométrie de Ψ_μ implique alors que la variance de X est nulle :

$$\mathbb{E}_\mu[(\ell(\Delta x))^2] = \|h_X\|_\mu^2 = 0.$$

Une variable aléatoire centrée de variance nulle étant presque sûrement nulle, nous en déduisons que pour toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}_2^*$:

$$\ell(\Delta x) = 0 \quad \mu\text{-presque sûrement.}$$

Étape 5 : Séparabilité de $\mathcal{B}_2$ et conclusion.

L'espace de Banach $\mathcal{B}_2$ étant séparable, son dual topologique $\mathcal{B}_2^*$ admet une famille dénombrable $(g_k^*)_{k \geq 1} \subset \mathcal{B}_2^*$ qui sépare les points de $\mathcal{B}_2$:

$$\forall y \in \mathcal{B}_2, \quad (\forall k \geq 1, g_k^*(y) = 0) \implies y = 0.$$

D'après l'étape 4, il existe pour chaque $k \geq 1$ un borélien négligeable $N_k \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_1)$ avec $\mu(N_k) = 0$ tel que :

$$g_k^*(\Delta x) = 0, \quad \forall x \in V \setminus N_k.$$

Posons $N = \bigcup_{k=1}^\infty N_k$. Par sous-additivité dénombrable, $\mu(N) = 0$. Pour tout point $x \in V \setminus N$, on a simultanément :

$$g_k^*(\Delta x) = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

La famille $(g_k^*)_{k \geq 1}$ séparant les points de $\mathcal{B}_2$, il s'ensuit que :

$$\Delta(x) = 0, \quad \forall x \in V \setminus N.$$

Comme $\mu(V \setminus N) = \mu(V) - \mu(N) = 1 - 0 = 1$, on conclut que

$$\hat{A}_1(x) = \hat{A}_2(x) \quad \mu\text{-presque sûrement,}$$

ce qui achève la démonstration de l'unicité essentielle du prolongement. $\square$

En pratique, cela garantit que peu importe la base ou la méthode choisie pour programmer le bruit sur ordinateur, la simulation donnera exactement le même résultat. Le modèle est donc parfaitement stable et unique.

3 Modélisation du Bruit en Dimension Infinie

Ce chapitre a pour objectif de construire l'analogue spatio-temporel du mouvement brownien ainsi que l'intégrale stochastique associée. Avant d'aborder ces constructions, explicitons l'obstacle théorique qui motive l'approche adoptée.

L'obstacle de la trace infinie. Pour modéliser des fluctuations spatialement indépendantes sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, le candidat naturel est un champ gaussien dont l'opérateur de covariance spatiale est l'identité $\text{Id}_{\mathcal{H}}$. La transformée de Fourier associée s'écrirait alors :

$$\hat{\mu}(h) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2\right), \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Or, nous avons établi à la Proposition 2.10 qu'une mesure gaussienne sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ n'existe que si son opérateur de covariance est à trace finie. Comme $\dim \mathcal{H} = \infty$, la trace de l'identité y diverge grossièrement ($\text{tr}(\text{Id}_{\mathcal{H}}) = +\infty$) : il n'existe donc aucune mesure de probabilité gaussienne sur $\mathcal{H}$ possédant une telle covariance.

Principe de la démarche. Pour contourner cette impossibilité, l'idée centrale consiste à ne pas chercher à définir le bruit directement dans $\mathcal{H}$, mais dans un espace de Hilbert plus grand $\mathcal{H}'$. En choisissant un plongement $\iota: \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}'$ de type Hilbert-Schmidt (Définition 2.12), l'opérateur de covariance induit dans $\mathcal{H}'$ devient à trace finie, ce qui rend l'objet mathématiquement bien défini.

Dans ce chapitre, nous allons :

1. construire explicitement cet espace élargi $\mathcal{H}'$ et définir le mouvement brownien cylindrique ;
2. étendre l'intégrale d'Itô aux processus à valeurs opérateurs grâce à l'isométrie d'Itô en dimension infinie.

3.1 Le Mouvement Brownien Cylindrique

Cette sous-section est dédiée à la construction du mouvement brownien en dimension infinie. Nous introduisons l'espace de Hilbert élargi $\mathcal{H}'$, puis définissons le mouvement brownien cylindrique par sa structure de covariance avant d'établir son existence et son unicité en loi via sa décomposition spectrale.

Cadre fonctionnel et espace élargi $\mathcal{H}'$

Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ un espace de Hilbert réel séparable. Comme établi au chapitre précédent, aucune mesure gaussienne d'opérateur de covariance $\text{Id}_{\mathcal{H}}$ ne peut exister sur $\mathcal{H}$ dès lors que $\dim \mathcal{H} = \infty$, car la trace de l'identité y est infinie. Pour surmonter cette obstruction, on plonge $\mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert auxiliaire plus vaste.

Soit $\mathcal{H}'$ un espace de Hilbert séparable tel qu'il existe une injection linéaire continue à image dense $\iota: \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}'$ appartenant à la classe de Hilbert-Schmidt ($\iota \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$).

Exemple 5 (Construction explicite par régularisation spectrale). Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne orthonormée de $\mathcal{H}$. On définit $\mathcal{H}'$ comme le complété de $\mathcal{H}$ pour la norme à poids :

$$\|x\|_{\mathcal{H}'}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2.$$

Le produit scalaire associé est donné par $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \langle y, e_n \rangle_{\mathcal{H}}$. Une base orthonormée de $\mathcal{H}'$ est alors fournie par la famille normalisée $\tilde{e}_n = n e_n$.

L'opérateur adjoint $\iota^*: \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ vérifie par dualité pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\langle x, \iota^* \tilde{e}_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \iota x, \tilde{e}_n \rangle_{\mathcal{H}'} = \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle x, \frac{1}{n} e_n \right\rangle_{\mathcal{H}},$$

d'où $\iota^* \tilde{e}_n = \frac{1}{n} e_n$. L'opérateur auto-adjoint positif associé $\iota^* \iota: \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'$ est à trace finie sur $\mathcal{H}'$, sa trace valant :

$$\text{tr}_{\mathcal{H}'}(\iota^* \iota) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \iota^* \tilde{e}_n, \tilde{e}_n \rangle_{\mathcal{H}'} = \sum_{n=1}^{\infty} \|\iota^* \tilde{e}_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

En particulier, si $\mathcal{H} = L^2(0, \pi)$ et que $(e_n)_{n \geq 1}$ désigne la base des fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet, $\mathcal{H}'$ s'identifie à l'espace de Sobolev à indice négatif $H^{-1}(0, \pi)$.

Définition intrinsèque du mouvement brownien cylindrique

Avant de poser la définition du processus, précisons le lien entre la structure gaussienne d'un processus vectoriel et celle de sa mesure de trajectoires.

Définition 3.1 (Processus gaussien et équivalence). *Soit $X = (X(t))_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique à trajectoires continues, à valeurs dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{K}$. Le processus X est dit gaussien s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :*

1. **Lois finies-dimensionnelles :** *Pour tout entier $k \geq 1$, pour tous $t_1, \dots, t_k \in [0, T]$ et tous $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{K}$, le vecteur aléatoire*

$$(\langle X(t_1), h_1 \rangle_{\mathcal{K}}, \dots, \langle X(t_k), h_k \rangle_{\mathcal{K}}),$$

est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^k$.

2. **Mesure sur l'espace des trajectoires :** *La loi de X définit une mesure de probabilité gaussienne sur l'espace de Banach $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{K})$ (au sens de la Définition 2.7).*

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = \mathcal{C}([0, T], \mathcal{K})$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathcal{K}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_{\mathcal{K}}$. L'intervalle $[0, T]$ étant compact et $\mathcal{K}$ étant séparable, $\mathcal{B}$ est un espace de Banach séparable, garantissant que sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{B})$ coïncide avec la tribu cylindrique.

Rappelons que, par la Définition 2.7, la loi du processus X est une mesure de probabilité gaussienne sur $\mathcal{B}$ si et seulement si, pour toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}^*$, la variable aléatoire réelle $\ell(X)$ suit une loi normale sur $\mathbb{R}$.

Sens direct : (2) $\implies$ (1).

Supposons que la loi de X définisse une mesure gaussienne sur $\mathcal{B}$.

Soient $k \geq 1$ un entier, $t_1, \dots, t_k \in [0, T]$ des instants fixés et $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{K}$ des vecteurs arbitraires. Par définition, le vecteur aléatoire $(\langle X(t_1), h_1 \rangle_{\mathcal{K}}, \dots, \langle X(t_k), h_k \rangle_{\mathcal{K}})$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^k$ si et seulement si toute combinaison linéaire scalaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne réelle.

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ des scalaires quelconques. Définissons l'application $\ell: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\ell(f) = \sum_{i=1}^k a_i \langle f(t_i), h_i \rangle_{\mathcal{K}}, \quad \forall f \in \mathcal{B}.$$

- **Linéarité :** Elle découle directement de la bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$.
- **Continuité :** Pour tout $f \in \mathcal{B}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|\ell(f)| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| |\langle f(t_i), h_i \rangle_{\mathcal{K}}| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| \|f(t_i)\|_{\mathcal{K}} \|h_i\|_{\mathcal{K}}.$$

En majorant chaque évaluation ponctuelle par le supremum global $\|f(t_i)\|_{\mathcal{K}} \leq \|f\|_{\infty}$, on obtient :

$$|\ell(f)| \leq \left(\sum_{i=1}^k |a_i| \|h_i\|_{\mathcal{K}} \right) \|f\|_{\infty}.$$

La constante entre parenthèses étant finie et indépendante de f , l'application ℓ est continue sur $\mathcal{B}$ et appartient donc au dual topologique $\mathcal{B}^*$.

Par hypothèse, la loi de X étant une mesure gaussienne sur $\mathcal{B}$, la variable $\ell(X) = \sum_{i=1}^k a_i \langle X(t_i), h_i \rangle_{\mathcal{K}}$ est une variable aléatoire gaussienne réelle d'après la Définition 2.7. Toute combinaison linéaire de ses composantes étant normale, le vecteur $(\langle X(t_1), h_1 \rangle_{\mathcal{K}}, \dots, \langle X(t_k), h_k \rangle_{\mathcal{K}})$ est gaussien dans $\mathbb{R}^k$, ce qui établit l'assertion (1).

Sens réciproque : (1) $\implies$ (2).

Supposons que toutes les lois finies-dimensionnelles soient conjointement gaussiennes. Soit $\ell \in \mathcal{B}^*$ une forme linéaire continue fixée. Il s'agit d'établir que $\ell(X)$ est une variable aléatoire gaussienne sur $\mathbb{R}$.

Étape 1 : Approximation uniforme par interpolation nodale.

Pour tout entier $n \geq 1$, considérons la subdivision régulière de l'intervalle $[0, T]$ donnée par les nœuds $t_j = j \frac{T}{n}$ pour $j \in \{0, \dots, n\}$. On associe à cette grille la famille des fonctions continues affines par morceaux $(\phi_j^n)_{0 \leq j \leq n}$ sur $[0, T]$ satisfaisant $\phi_j^n(t_i) = \delta_{i,j}$, avec $0 \leq \phi_j^n(t) \leq 1$ et $\sum_{j=0}^n \phi_j^n(t) = 1$ pour tout $t \in [0, T]$.

Pour toute trajectoire $f \in \mathcal{B}$, définissons son interpolée linéaire $f_n \in \mathcal{B}$ par :

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^n \phi_j^n(t) f(t_j), \quad \forall t \in [0, T].$$

L'intervalle $[0, T]$ étant un compact, le théorème de Heine garantit que toute fonction continue $f \in \mathcal{B}$ y est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|t - s| \leq \delta \implies \|f(t) - f(s)\|_{\mathcal{K}} \leq \varepsilon$.

Dès que le pas de discrétisation vérifie $\frac{T}{n} \leq \delta$, chaque instant $t \in [t_j, t_{j+1}]$ donne :

$$\|f_n(t) - f(t)\|_{\mathcal{K}} = \|\phi_j^n(t)(f(t_j) - f(t)) + \phi_{j+1}^n(t)(f(t_{j+1}) - f(t))\|_{\mathcal{K}} \leq \varepsilon.$$

On en déduit la convergence uniforme : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{B}$.

Étape 2 : Représentation de l'action de ℓ par dualité de Riesz.

Par continuité et linéarité de la forme $\ell \in \mathcal{B}^*$, l'évaluation sur la trajectoire approchée vérifie :

$$\ell(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \ell(\phi_j^n \cdot f(t_j)).$$

Pour chaque couple d'indices (n, j) fixé, introduisons l'opérateur linéaire $L_j^n : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ défini pour tout vecteur $h \in \mathcal{K}$ par $L_j^n(h) = \ell(\phi_j^n \cdot h)$, où $(\phi_j^n \cdot h)(t) = \phi_j^n(t)h$ appartient à $\mathcal{B}$. Cette application est continue sur $\mathcal{K}$ car :

$$|L_j^n(h)| \leq \|\ell\|_{\mathcal{B}^*} \|\phi_j^n \cdot h\|_{\infty} = \|\ell\|_{\mathcal{B}^*} \left(\sup_{t \in [0, T]} |\phi_j^n(t)| \right) \|h\|_{\mathcal{K}} = \|\ell\|_{\mathcal{B}^*} \|h\|_{\mathcal{K}}.$$

L'espace $\mathcal{K}$ étant un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz assure l'existence d'un unique vecteur $k_j^n \in \mathcal{K}$ tel que $L_j^n(h) = \langle h, k_j^n \rangle_{\mathcal{K}}$ pour tout $h \in \mathcal{K}$. En évaluant en $h = f(t_j)$, l'action de la forme linéaire prend la forme explicite :

$$\ell(f_n) = \sum_{j=0}^n \langle f(t_j), k_j^n \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Étape 3 : Passage à la limite stochastique.

Puisque le processus X est à trajectoires continues, on a $X(\omega) \in \mathcal{B}$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. L'approximation précédente s'applique donc trajectoire par trajectoire :

$$\ell(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{presque sûrement, avec} \quad S_n = \sum_{j=0}^n \langle X(t_j), k_j^n \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Pour chaque entier $n \geq 1$, l'hypothèse (1) stipule que le vecteur $(\langle X(t_0), k_0^n \rangle_{\mathcal{K}}, \dots, \langle X(t_n), k_n^n \rangle_{\mathcal{K}})$ est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^{n+1}$. La somme finie S_n , étant une combinaison linéaire des composantes de ce vecteur gaussien, est par définition une variable aléatoire réelle gaussienne.

La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers $\ell(X)$, ce qui entraîne sa convergence en loi. Chaque variable S_n étant gaussienne réelle, le Lemme 2.1 assure que la limite $\ell(X)$ est une variable aléatoire gaussienne réelle.

Cette propriété étant vérifiée pour toute forme linéaire continue $\ell \in \mathcal{B}^*$, la loi du processus X est, par la Définition 2.7, une mesure de probabilité gaussienne sur l'espace de Banach $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{K})$. $\square$

Nous disposons à présent du cadre requis pour définir le mouvement brownien cylindrique de manière intrinsèque.

Définition 3.2 (Mouvement brownien cylindrique). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles. On appelle mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$ (à valeurs dans l'espace élargi $\mathcal{H}'$) tout processus stochastique adapté $W = (W(t))_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{H}'$ vérifiant :*

1. $W(0) = 0$ presque sûrement, et les trajectoires $t \mapsto W(t)$ sont presque sûrement continues dans $\mathcal{H}'$;
2. pour tous $0 \leq s < t$, l'accroissement $W(t) - W(s)$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$ et suit une loi gaussienne centrée sur $\mathcal{H}'$;
3. pour tous $s, t \geq 0$ et tous $h, k \in \mathcal{H}'$, le processus satisfait la structure de covariance :

$$\mathbb{E}[\langle W(s), h \rangle_{\mathcal{H}'} \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}] = (s \wedge t) \langle \iota^* h, \iota^* k \rangle_{\mathcal{H}} = (s \wedge t) \langle \iota^* h, k \rangle_{\mathcal{H}'}. \quad \square$$

En particulier, pour tout $t \geq 0$, $W(t)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée dans $\mathcal{H}'$ d'opérateur de covariance $t\iota^*$.

Proposition 3.1 (Unicité en loi). *La loi de tout mouvement brownien cylindrique W sur $\mathcal{H}$ est uniquement déterminée en tant que mesure de probabilité borélienne sur l'espace de Banach des trajectoires $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}')$.*

Démonstration. D'après la condition (2) de la Définition 3.2, les accroissements de W sont indépendants et gaussiens centrés. Par conséquent, pour toute subdivision $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq T$ et tous vecteurs $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{H}'$, le vecteur aléatoire $(\langle W(t_1), h_1 \rangle_{\mathcal{H}'}, \dots, \langle W(t_k), h_k \rangle_{\mathcal{H}'})$ est gaussien dans $\mathbb{R}^k$. D'après la Définition 3.1, la loi de W est donc une mesure gaussienne centrée sur l'espace de Banach séparable $\mathcal{B} = \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}')$.

D'après le Corollaire 2.3, une mesure gaussienne centrée sur un espace de Banach séparable est uniquement caractérisée par son opérateur de covariance sur $\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*$. Comme établi lors de la preuve de la Définition 3.1, toute forme $\ell \in \mathcal{B}^*$ est limite faible-* de combinaisons linéaires finies de formes d'évaluation $f \mapsto \langle f(t), h \rangle_{\mathcal{H}'}$. La structure de covariance fixée par la condition (3) de la Définition 3.2 sur ces formes élémentaires détermine donc de manière unique l'opérateur de covariance sur $\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*$, assurant l'unicité de la loi de W . $\square$

Existence et représentation spectrale en série

Le théorème fondamental suivant établit à la fois l'existence du mouvement brownien cylindrique et sa décomposition canonique en série de Fourier aléatoire.

Théorème 3.1 (Représentation spectrale et existence). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré usuel. Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et $(\beta_n)_{n \geq 1}$ une suite de mouvements browniens réels standards indépendants et $(\mathcal{F}_t)$ -adaptés.*

1. *Pour tout $T > 0$, la série aléatoire :*

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \iota(e_n),$$

converge dans $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}'))$. (Par le théorème d'Itô-Nisio [9], la convergence a également lieu presque sûrement).

2. *Le processus somme $W = (W(t))_{t \geq 0}$ définit un mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$ (Définition 3.2).*

3. *Réciproquement, soit W un mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$. Pour tout $t > 0$, soit $\Psi_{\mu_t} : \mathcal{H}_{\mu_t} \rightarrow L^2(\Omega)$ l'isomorphisme de Cameron-Martin associé à la mesure $\mu_t = \text{Law}(W(t))$ (Proposition 2.14), avec $\mathcal{H}_{\mu_t} = (\mathcal{H}, t^{-1/2} \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.*

Alors, pour toute base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{H}$, les processus définis par $\beta_n(t) := t\Psi_{\mu_t}(e_n)$ pour $t > 0$ et $\beta_n(0) := 0$ sont des mouvements browniens réels standards indépendants, et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \iota(e_n)$ converge vers $W(t)$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}'))$.

Démonstration. Étape 1 : Convergence de la série par l'inégalité de Doob.

Pour tout entier $N \geq 1$, posons la somme partielle $S_N(t) = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) \iota(e_n)$. Pour tous entiers $M > N \geq 1$, le processus différence $S_M(t) - S_N(t)$ est une martingale continue à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}'$.

D'après l'inégalité maximale de Doob appliquée à la sous-martingale continue $\|S_M(t) - S_N(t)\|_{\mathcal{H}'}^2$, on a :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|S_M(t) - S_N(t)\|_{\mathcal{H}'}^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} [\|S_M(T) - S_N(T)\|_{\mathcal{H}'}^2].$$

Par indépendance des mouvements browniens et en utilisant la variance $\mathbb{E}[\beta_n(T)^2] = T$, on évalue le membre de droite :

$$\mathbb{E} [\|S_M(T) - S_N(T)\|_{\mathcal{H}'}^2] = \sum_{n=N+1}^M \mathbb{E}[\beta_n(T)^2] \|\iota(e_n)\|_{\mathcal{H}'}^2 = T \sum_{n=N+1}^M \|\iota(e_n)\|_{\mathcal{H}'}^2.$$

L'opérateur ι étant de Hilbert-Schmidt ($\iota \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$), la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \|\iota(e_n)\|_{\mathcal{H}'}^2 = \|\iota\|_{\text{HS}}^2$ converge. Le reste de cette série tend vers 0 lorsque $N, M \rightarrow \infty$. La suite des sommes partielles $(S_N)_{N \geq 1}$ est donc de Cauchy dans l'espace de Banach complet $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}'))$. Elle y converge par conséquent vers un processus W à trajectoires presque sûrement continues.

Étape 2 : Adaptation, indépendance des accroissements et structure de covariance.

Vérifions successivement que le processus limite W satisfait l'ensemble des conditions de la Définition 3.2 :

1. *Continuité des trajectoires et adaptation à la filtration :*

D'après l'Étape 1, la série converge dans $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}'))$, de sorte que $W(0) = 0$ presque sûrement et les trajectoires $t \mapsto W(t)$ sont presque sûrement continues dans $\mathcal{H}'$.

De plus, pour chaque $t \geq 0$ et tout entier $N \geq 1$, la somme partielle $S_N(t) = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) \iota(e_n)$ est une combinaison linéaire finie de variables aléatoires $\mathcal{F}_t$ -mesurables à valeurs dans $\mathcal{H}'$. Elle est donc $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Puisque $S_N(t) \rightarrow W(t)$ presque sûrement dans l'espace polonais $\mathcal{H}'$ et que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifie les conditions habituelles (elle contient les ensembles négligeables), la limite $W(t)$ est également $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Le processus $(W(t))_{t \geq 0}$ est donc bien adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

2. *Indépendance et loi des accroissements :*

Soient $0 \leq s < t$. Pour tout entier $N \geq 1$, chaque accroissement réel $\beta_n(t) - \beta_n(s)$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$ et suit la loi $\mathcal{N}(0, t - s)$. L'accroissement partiel :

$$S_N(t) - S_N(s) = \sum_{n=1}^N (\beta_n(t) - \beta_n(s)) \iota(e_n)$$

est donc une variable aléatoire gaussienne centrée dans $\mathcal{H}'$, indépendante de $\mathcal{F}_s$. Pour toute fonction continue bornée $F: \mathcal{H}' \rightarrow \mathbb{R}$ et tout événement $A \in \mathcal{F}_s$, la convergence dans L^2 garantit l'existence d'une sous-suite $(S_{N_k})_{k \geq 1}$ telle que $S_{N_k}(t) - S_{N_k}(s) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} W(t) - W(s)$, d'où $F(S_{N_k}(t) - S_{N_k}(s)) \rightarrow F(W(t) - W(s))$ presque sûrement. Par convergence dominée (la fonction F étant bornée), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F(W(t) - W(s)) \mathbf{1}_A] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F(S_{N_k}(t) - S_{N_k}(s)) \mathbf{1}_A] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F(S_{N_k}(t) - S_{N_k}(s))] \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[F(W(t) - W(s))] \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{H}'$ étant polonais, l'espace des fonctions continues bornées $\mathcal{C}_b(\mathcal{H}')$ engendre sa tribu borélienne, ce qui établit que l'accroissement $W(t) - W(s)$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$. De plus, pour tout $k \in \mathcal{H}'$, la variable réelle $\langle W(t) - W(s), k \rangle_{\mathcal{H}'} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N(t) - S_N(s), k \rangle_{\mathcal{H}'}$ est une limite presque sûre de gaussiennes réelles centrées, donc est gaussienne centrée d'après le Lemme 2.1. L'accroissement $W(t) - W(s)$ est par conséquent une variable aléatoire gaussienne centrée dans $\mathcal{H}'$.

3. *Structure de covariance spatio-temporelle :*

Soient $h, k \in \mathcal{H}'$ et $s, t \geq 0$. Par continuité du produit scalaire dans $\mathcal{H}'$ et continuité du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, on évalue la covariance sur les sommes partielles :

$$\mathbb{E}[\langle W(s), h \rangle_{\mathcal{H}'} \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbb{E}[\beta_n(s) \beta_m(t)] \langle \iota(e_n), h \rangle_{\mathcal{H}'} \langle \iota(e_m), k \rangle_{\mathcal{H}'}.$$

Puisque les $(\beta_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants, on a $\mathbb{E}[\beta_n(s) \beta_m(t)] = \delta_{n,m}(s \wedge t)$. Avec $\langle \iota(e_n), h \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle e_n, \iota^* h \rangle_{\mathcal{H}}$, la somme double se réduit aux termes diagonaux :

$$\mathbb{E}[\langle W(s), h \rangle_{\mathcal{H}'} \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}] = (s \wedge t) \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \iota^* h \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_n, \iota^* k \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Comme $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}$, l'identité de Parseval donne :

$$\mathbb{E}[\langle W(s), h \rangle_{\mathcal{H}'} \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}] = (s \wedge t) \langle \iota^* h, \iota^* k \rangle_{\mathcal{H}} = (s \wedge t) \langle \iota^* h, k \rangle_{\mathcal{H}'}. \quad \square$$

Les trois conditions étant satisfaites, le processus somme W est un mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$ au sens de la Définition 3.2.

Étape 3 : Réciproque et décomposition spectrale.

Soit W un mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$. Pour tout $t > 0$, la variable $W(t)$ définit une mesure gaussienne centrée μ_t sur $\mathcal{H}'$ de covariance $K_t = t \iota \iota^*$. Comme nous le précisons au Corollaire 3.1, son espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_{\mu_t}$ s'identifie à $\mathcal{H}$ muni de la norme $\|h\|_{\mu_t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \|h\|_{\mathcal{H}}$.

Considérons l'isomorphisme isométrique de Cameron-Martin $\Psi_{\mu_t}: \mathcal{H}_{\mu_t} \rightarrow \mathcal{R}_{\mu_t} \subset L^2(\Omega)$ de la Proposition 2.14. Rappelons que par définition, pour tout $k \in \mathcal{H}'$ associé à la forme linéaire continue $\ell_k = \langle \cdot, k \rangle_{\mathcal{H}'}$, on a :

$$\Psi_{\mu_t}(K_t k) = \ell_k(W(t)) = \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}.$$

Puisque $K_t k = t \iota(\iota^* k)$, en identifiant l'élément lisse à son représentant dans $\mathcal{H}$, il vient $\Psi_{\mu_t}(t \iota^* k) = \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}$, soit pour tout $k \in \mathcal{H}'$:

$$\Psi_{\mu_t}(\iota^* k) = \frac{1}{t} \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}$$

Ainsi, pour tout $h \in \mathcal{H}$, l'élément $W(t)(h) := t \Psi_{\mu_t}(h)$ définit un prolongement linéaire continu de $\iota^*(\mathcal{H}')$ à $\mathcal{H}$ dans $L^2(\Omega)$ satisfaisant $W(t)(\iota^* k) = \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}$. Pour tout $t > 0$ et toute base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{H}$, posons :

$$\beta_n(t) := t \Psi_{\mu_t}(e_n) \quad \text{pour } t > 0, \quad \text{et} \quad \beta_n(0) := 0.$$

Vérifions que les $(\beta_n)_{n \geq 1}$ sont des mouvements browniens réels standards indépendants :

- **Adaptation et indépendance des accroissements** : Pour chaque $n \geq 1$, $\beta_n(t)$ est limite dans $L^2(\Omega)$ des variables $\mathcal{F}_t$ -mesurables $\langle W(t), k_{n,j} \rangle_{\mathcal{H}'}$; il est donc $\mathcal{F}_t$ -adapté, et ses accroissements $\beta_n(t) - \beta_n(s)$ héritent de W l'indépendance vis-à-vis de $\mathcal{F}_s$ pour $s \leq t$.
- **Loi et structure de covariance** : Pour chaque $t > 0$, $\Psi_{\mu_t}(e_n)$ est une variable gaussienne centrée d'après la Proposition 2.18, de variance $\|e_n\|_{\mu_t}^2 = \frac{1}{t} \|e_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{t}$, d'où $\mathbb{E}[\beta_n(t)^2] = t^2(1/t) = t$. Plus généralement, pour $h, g \in \mathcal{H}$ approchés par des suites d'éléments de $\iota^*(\mathcal{H}')$, la structure de covariance (3) de la Définition 3.2 s'étend par continuité dans $L^2(\Omega)$ et assure :

$$\mathbb{E}[\beta_n(s)\beta_m(t)] = (s \wedge t) \langle e_n, e_m \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{n,m}(s \wedge t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

Les processus gaussiens $(\beta_n)_{n \geq 1}$ sont donc non corrélés, d'où mutuellement indépendants.

- **Continuité des trajectoires** : Pour tout $n \geq 1$, par densité de $\iota^*(\mathcal{H}')$ dans $\mathcal{H}$, il existe une suite $(k_{n,j})_{j \geq 1}$ dans $\mathcal{H}'$ telle que $\iota^* k_{n,j} \rightarrow e_n$ dans $\mathcal{H}$. Pour chaque $j \geq 1$, le processus $Y_j(t) := \langle W(t), k_{n,j} \rangle_{\mathcal{H}'}$ est une martingale à trajectoires continues par continuité de $t \mapsto W(t)$ dans $\mathcal{H}'$. Pour tous entiers $i, j \geq 1$, l'inégalité maximale de Doob appliquée à la martingale continue $Y_j - Y_i$ donne :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y_j(t) - Y_i(t)|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} [|Y_j(T) - Y_i(T)|^2] = 4T \|\iota^* k_{n,j} - \iota^* k_{n,i}\|_{\mathcal{H}}^2 \xrightarrow{i, j \rightarrow \infty} 0.$$

La suite $(Y_j)_{j \geq 1}$ est donc de Cauchy dans l'espace de Banach $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}))$. Elle converge donc vers un processus à trajectoires presque sûrement continues $\tilde{\beta}_n \in L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}))$. Comme $Y_j(t) \rightarrow \beta_n(t)$ dans $L^2(\Omega)$ pour chaque t , on a $\tilde{\beta}_n(t) = \beta_n(t)$ presque sûrement. Le processus β_n admet donc une modification continue.

D'après l'Étape 1, la série $\widetilde{W}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \iota(e_n)$ converge dans $L^2(\Omega; \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}'))$.

Il reste à vérifier que $\widetilde{W} = W$. Soit $k \in \mathcal{H}'$. Par continuité du produit scalaire dans $\mathcal{H}'$ et linéarité continue de $W(t)(\cdot)$ sur $\mathcal{H}$, on a :

$$\langle \widetilde{W}(t), k \rangle_{\mathcal{H}'} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \langle \iota(e_n), k \rangle_{\mathcal{H}'} = \sum_{n=1}^{\infty} W(t)(e_n) \langle e_n, \iota^* k \rangle_{\mathcal{H}} = W(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle \iota^* k, e_n \rangle_{\mathcal{H}} e_n \right) = W(t)(\iota^* k).$$

Or, par construction, $W(t)(\iota^* k) = \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'}$. On en déduit que pour tout $k \in \mathcal{H}'$:

$$\langle \widetilde{W}(t), k \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle W(t), k \rangle_{\mathcal{H}'} \quad \text{presque sûrement.}$$

L'espace $\mathcal{H}'$ étant séparable, une famille dénombrable dense sépare les points de $\mathcal{H}'$, ce qui entraîne $\widetilde{W}(t) = W(t)$ presque sûrement pour tout $t \in [0, T]$. Les deux processus étant presque sûrement à trajectoires continues dans $\mathcal{H}'$, ils sont indistinguishables. $\square$

Corollaire 3.1 (Espace de Cameron-Martin de la loi de $W(t)$). *Pour tout $t > 0$, soit $\mu_t = \text{Law}(W(t))$ la mesure gaussienne centrée sur $\mathcal{H}'$ de covariance $K_t = t \iota^*$ (Définition 3.2).*

L'espace de Cameron-Martin associé à μ_t est l'espace $\mathcal{H}$ (identifié au sous-espace $\iota(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}'$), muni du produit scalaire renormalisé :

$$\langle h, g \rangle_{\mu_t} = \frac{1}{t} \langle h, g \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \text{soit} \quad \|h\|_{\mu_t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \|h\|_{\mathcal{H}}.$$

En particulier, pour $t = 1$, l'espace de Cameron-Martin coïncide isométriquement avec $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.

Démonstration. La démonstration repose sur l'identification de l'espace des éléments lisses $\mathcal{H}_{\mu_t}^\circ$, puis sur sa complétion (Définition de l'espace de Cameron-Martin).

Étape 1 : Caractérisation des éléments lisses $\mathcal{H}_{\mu_t}^\circ$.

D'après la Proposition 2.11, l'espace des éléments lisses coïncide avec l'image de l'opérateur de covariance hilbertien :

$$\mathcal{H}_{\mu_t}^\circ = \text{Im}(K_t) = \text{Im}(t \iota^*) = \iota(\text{Im}(\iota^*)).$$

L'image $\iota(\mathcal{H})$ étant dense dans $\mathcal{H}'$, l'opérateur adjoint vérifie $\ker(\iota^*) = (\text{Im } \iota)^\perp = \{0\}$. L'opérateur $K_t = t \iota \iota^*$ est donc injectif sur $\mathcal{H}'$. Ainsi, pour tout $h \in \mathcal{H}_{\mu_t}^\circ$, il existe un unique antécédent $k \in \mathcal{H}'$ tel que $h = K_t k = t \iota(\iota^* k)$. En identifiant $\mathcal{H}$ à son image $\iota(\mathcal{H})$, le vecteur h correspond dans $\mathcal{H}$ à l'élément $u = t \iota^* k \in \mathcal{H}$.

Étape 2 : Calcul de la norme de Cameron-Martin.

Par définition de la norme sur $\mathcal{H}_{\mu_t}^\circ$, on évalue la forme quadratique de covariance en l'antécédent unique k :

$$\|h\|_{\mu_t}^2 = C_{\mu_t}(k, k) = \langle K_t k, k \rangle_{\mathcal{H}'} = t \langle \iota^* k, k \rangle_{\mathcal{H}'} = t \|\iota^* k\|_{\mathcal{H}'}^2.$$

En exprimant cette quantité en fonction du vecteur $u = t \iota^* k \in \mathcal{H}$, il vient :

$$\|h\|_{\mu_t}^2 = t \left\| \frac{1}{t} u \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{t} \|u\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Sur le sous-espace $\mathcal{H}_{\mu_t}^\circ$, la norme de Cameron-Martin est donc exactement proportionnelle à la norme hilbertienne d'origine : $\|\cdot\|_{\mu_t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Étape 3 : Complétion et conclusion.

Par définition, l'espace de Cameron-Martin $\mathcal{H}_{\mu_t}$ est le complété hilbertien de $\mathcal{H}_{\mu_t}^\circ$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mu_t}$.

L'injection $\iota : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}'$ étant continue et injective, son adjoint vérifie $\overline{\text{Im}(\iota^*)} = (\ker \iota)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$. L'image $\text{Im}(\iota^*)$ est donc dense dans $\mathcal{H}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, ce qui implique que $\mathcal{H}_{\mu_t}^\circ$ est dense dans $\mathcal{H}$.

L'espace $(\mathcal{H}, \frac{1}{\sqrt{t}} \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ étant déjà complet, le complété de $\mathcal{H}_{\mu_t}^\circ$ s'identifie canoniquement et de manière unique à $\mathcal{H}$ tout entier, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 13 (Espace de Cameron-Martin trajectoirel). *Il convient de distinguer l'espace de Cameron-Martin de la variable à temps fixé $W(t)$ sur $\mathcal{H}'$ (qui s'identifie à $\mathcal{H}$ d'après le Corollaire 3.1) de celui de la **trajectoire complète** $t \mapsto W(t)$, vue comme mesure gaussienne sur l'espace de Banach $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}')$ (au sens de la Définition 3.1).*

On admet le résultat suivant (voir Hairer [7, Section 3.7]) : l'espace de Cameron-Martin associé à la loi du processus $(W(t))_{t \in [0, T]}$ s'identifie à l'espace de Sobolev à valeurs vectorielles $H_0^1([0, T], \mathcal{H})$, défini par :

$$H_0^1([0, T], \mathcal{H}) = \left\{ h \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H}) \mid h(0) = 0, \frac{\partial h}{\partial t} \in L^2([0, T], \mathcal{H}) \right\},$$

muni du produit scalaire :

$$\langle h, k \rangle_{H_0^1} = \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial t}(s), \frac{\partial k}{\partial t}(s) \right\rangle_{\mathcal{H}} ds,$$

où $\frac{\partial h}{\partial t}$ désigne la dérivée faible temporelle.

Cette formalisation topologique de l'espace élargi $\mathcal{H}'$ fournit le cadre géométrique rigoureux requis pour étendre le calcul d'Itô à la dimension infinie. Nous disposons désormais de tous les outils nécessaires pour aborder la construction de notre espace d'intégration.

3.2 L'Intégrale Stochastique

Le mouvement brownien cylindrique étant construit, nous pouvons définir l'intégration stochastique pour des processus à valeurs opérateurs. Cette étape s'appuie sur l'isométrie d'Itô en dimension infinie. Cette approche fonctionnelle, initiée par Da Prato et Zabczyk [3], est présentée ici selon la formulation moderne de Hairer [7].

Afin de mener à bien cette construction en dimension infinie, il convient d'introduire au préalable une classe de processus simples qui servira de sous-espace dense.

Définition 3.3 (Processus élémentaire). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert séparables.

Un processus stochastique $\Phi = (\Phi(t))_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ est dit **élémentaire** s'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, une variable aléatoire $\Phi_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ et une famille de variables aléatoires $(\Phi_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ telles que :

1. pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, Φ_k est $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurable et vérifie $\mathbb{E} \left[\|\Phi_k\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 \right] < \infty$;
2. pour tout $t \in [0, T]$, le processus s'écrit sous la forme :

$$\Phi(t) = \Phi_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t).$$

Remarque 14. L'exigence $\Phi(t) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ est fondamentale : un simple opérateur linéaire borné $\Phi(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ne suffit pas. En effet, le bruit cylindrique excitant une infinité de directions indépendantes, la variance dans $\mathcal{K}$ de l'accroissement $\Phi(t)\Delta W$ fait intervenir la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Phi(t)e_n\|_{\mathcal{K}}^2$. La finitude de cette série (qui définit la classe de Hilbert-Schmidt) est la condition nécessaire et suffisante pour que le bruit transformé vive dans $\mathcal{K}$ avec une énergie (variance) finie.

Définition 3.4 (Intégrale stochastique d'un processus élémentaire). Soit $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t)$ un processus élémentaire au sens de la Définition 3.3 et soit W un mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$ à valeurs dans l'espace élargi $\mathcal{H}'$.

Pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, l'action de l'opérateur aléatoire Φ_k sur l'accroissement $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ s'interprète par prolongement mesurable $\hat{\Phi}_k(\Delta W_k)$ au sens du Théorème 2.5. De manière équivalente et intrinsèque à l'espace $\mathcal{H}$, elle est définie dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ par la série orthogonale convergente :

$$\hat{\Phi}_k \Delta W_k = \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m(t_{k+1}) - \beta_m(t_k)) \Phi_k e_m,$$

où $(e_m)_{m \geq 1}$ est une base hilbertienne quelconque de $\mathcal{H}$ et $\beta_m(t) = W(t)(e_m)$.

On définit l'intégrale stochastique de Φ par rapport à W sur l'intervalle $[0, T]$ comme la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{K}$ donnée par :

$$\int_0^T \Phi(t) dW(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\Phi}_k (W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Proposition 3.2 (Isométrie d'Itô en dimension infinie). Soit Φ un processus élémentaire au sens de la Définition 3.3. L'intégrale stochastique vérifie l'isométrie :

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \Phi(t) dW(t) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 dt \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \text{tr}(\Phi(t)\Phi^*(t)) dt \right].$$

Démonstration. Soit $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t)$ un processus élémentaire. Par définition de l'intégrale stochastique, en notant $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$:

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \Phi(t) dW(t) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\Phi}_k \Delta W_k \right\|_{\mathcal{K}}^2 \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\|\hat{\Phi}_k \Delta W_k\|_{\mathcal{K}}^2 \right] + 2 \sum_{0 \leq j < k \leq n-1} \mathbb{E} \left[\langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \hat{\Phi}_k \Delta W_k \rangle_{\mathcal{K}} \right].$$

Étape 1 : Annulation des termes croisés.

Soit $(e_m)_{m \geq 1}$ une base hilbertienne orthonormée de $\mathcal{H}$. Par définition du prolongement $\hat{\Phi}_k$ (Théorème 2.5), on a la convergence dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$:

$$\hat{\Phi}_k \Delta W_k = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \Delta \beta_{m,k} \Phi_k e_m,$$

où $\Delta \beta_{m,k} = \beta_m(t_{k+1}) - \beta_m(t_k)$. Pour tout couple d'indices $j < k$, on a $t_{j+1} \leq t_k$, de sorte que l'accroissement $\Delta W_j = W(t_{j+1}) - W(t_j)$ ainsi que Φ_j sont $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurables, rendant le vecteur $\hat{\Phi}_j \Delta W_j$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_k}$. De même, par définition d'un processus élémentaire, l'opérateur Φ_k est $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurable.

Considérons la suite des sommes partielles $S_M = \sum_{m=1}^M \Delta\beta_{m,k} \Phi_k e_m$. Puisque $S_M \rightarrow \hat{\Phi}_k \Delta W_k$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ lorsque $M \rightarrow \infty$ et que $\hat{\Phi}_j \Delta W_j \in L^2(\Omega; \mathcal{K})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit la convergence dans $L^1(\Omega)$:

$$\langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, S_M \rangle_{\mathcal{K}} \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{L^1(\Omega)} \langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \hat{\Phi}_k \Delta W_k \rangle_{\mathcal{K}}.$$

L'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{t_k}$ étant une contraction sur $L^1(\Omega)$, elle commute avec la limite en norme :

$$\mathbb{E} \left[\langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \hat{\Phi}_k \Delta W_k \rangle_{\mathcal{K}} \mid \mathcal{F}_{t_k} \right] = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^M \Delta\beta_{m,k} \langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \Phi_k e_m \rangle_{\mathcal{K}} \mid \mathcal{F}_{t_k} \right].$$

Pour chaque somme finie, le terme scalaire $\langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \Phi_k e_m \rangle_{\mathcal{K}}$ est $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurable. On peut donc l'extraire du conditionnement par linéarité :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^M \Delta\beta_{m,k} \langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \Phi_k e_m \rangle_{\mathcal{K}} \mid \mathcal{F}_{t_k} \right] = \sum_{m=1}^M \langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \Phi_k e_m \rangle_{\mathcal{K}} \mathbb{E}[\Delta\beta_{m,k} \mid \mathcal{F}_{t_k}].$$

L'accroissement brownien $\Delta\beta_{m,k} = \beta_m(t_{k+1}) - \beta_m(t_k)$ étant indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{t_k}$ et centré, on a :

$$\mathbb{E}[\Delta\beta_{m,k} \mid \mathcal{F}_{t_k}] = \mathbb{E}[\Delta\beta_{m,k}] = 0.$$

Toutes les sommes finies étant nulles, la limite l'est également presque sûrement :

$$\mathbb{E} \left[\langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \hat{\Phi}_k \Delta W_k \rangle_{\mathcal{K}} \mid \mathcal{F}_{t_k} \right] = 0,$$

ce qui assure par la loi des espérances itérées l'annulation de l'ensemble des termes croisés :

$$\mathbb{E} \left[\langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \hat{\Phi}_k \Delta W_k \rangle_{\mathcal{K}} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, \hat{\Phi}_k \Delta W_k \rangle_{\mathcal{K}} \mid \mathcal{F}_{t_k} \right] \right] = 0.$$

Étape 2 : Évaluation des termes diagonaux.

Pour chaque indice $k \in \{0, \dots, n-1\}$, considérons à nouveau les sommes partielles $S_M = \sum_{m=1}^M \Delta\beta_{m,k} \Phi_k e_m$.

Puisque $S_M \rightarrow \hat{\Phi}_k \Delta W_k$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ lorsque $M \rightarrow \infty$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la différence des carrés implique la convergence dans $L^1(\Omega)$:

$$\|S_M\|_{\mathcal{K}}^2 \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{L^1(\Omega)} \|\hat{\Phi}_k \Delta W_k\|_{\mathcal{K}}^2.$$

La continuité de l'espérance conditionnelle sur $L^1(\Omega)$ permet d'intervertir le conditionnement et la limite :

$$\mathbb{E} \left[\|\hat{\Phi}_k \Delta W_k\|_{\mathcal{K}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_k} \right] = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\|S_M\|_{\mathcal{K}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_k} \right].$$

Développons la norme au carré de la somme finie S_M par bilinéarité du produit scalaire dans $\mathcal{K}$:

$$\|S_M\|_{\mathcal{K}}^2 = \sum_{m=1}^M (\Delta\beta_{m,k})^2 \|\Phi_k e_m\|_{\mathcal{K}}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq M} \Delta\beta_{i,k} \Delta\beta_{j,k} \langle \Phi_k e_i, \Phi_k e_j \rangle_{\mathcal{K}}.$$

L'opérateur Φ_k étant $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurable, les scalaires $\|\Phi_k e_m\|_{\mathcal{K}}^2$ et $\langle \Phi_k e_i, \Phi_k e_j \rangle_{\mathcal{K}}$ sont $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurables et sortent du conditionnement par linéarité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|S_M\|_{\mathcal{K}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_k} \right] &= \sum_{m=1}^M \|\Phi_k e_m\|_{\mathcal{K}}^2 \mathbb{E} \left[(\Delta\beta_{m,k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k} \right] \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq M} \langle \Phi_k e_i, \Phi_k e_j \rangle_{\mathcal{K}} \mathbb{E} \left[\Delta\beta_{i,k} \Delta\beta_{j,k} \mid \mathcal{F}_{t_k} \right]. \end{aligned}$$

Les accroissements browniens $\Delta\beta_{m,k} = \beta_m(t_{k+1}) - \beta_m(t_k)$ sont indépendants de la tribu $\mathcal{F}_{t_k}$ et mutuellement indépendants pour des indices distincts. Par conséquent :

- pour tout $m \geq 1$, $\mathbb{E}[(\Delta\beta_{m,k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}] = \mathbb{E}[(\Delta\beta_{m,k})^2] = t_{k+1} - t_k$;
- pour $i \neq j$, $\mathbb{E}[\Delta\beta_{i,k}\Delta\beta_{j,k} \mid \mathcal{F}_{t_k}] = \mathbb{E}[\Delta\beta_{i,k}]\mathbb{E}[\Delta\beta_{j,k}] = 0 \times 0 = 0$.

Tous les termes croisés s'annulent donc identiquement, ce qui réduit l'espérance conditionnelle de la somme partielle à :

$$\mathbb{E}[\|S_M\|_{\mathcal{K}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}] = (t_{k+1} - t_k) \sum_{m=1}^M \|\Phi_k e_m\|_{\mathcal{K}}^2.$$

En passant à la limite $M \rightarrow \infty$, on obtient presque sûrement :

$$\mathbb{E}[\|\hat{\Phi}_k \Delta W_k\|_{\mathcal{K}}^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}] = (t_{k+1} - t_k) \sum_{m=1}^{\infty} \|\Phi_k e_m\|_{\mathcal{K}}^2.$$

On reconnaît dans la somme la définition de la norme de Hilbert-Schmidt $\|\Phi_k\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2$. En prenant l'espérance totale et en sommant sur k :

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \Phi(t) dW(t) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \right] = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \mathbb{E} [\|\Phi_k\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 dt \right].$$

L'égalité avec la trace $\text{tr}(\Phi(t)\Phi^*(t))$ découle directement de la relation $\|\Phi\|_{\text{HS}}^2 = \text{tr}(\Phi\Phi^*)$. $\square$

Remarque 15 (Indépendance vis-à-vis de l'espace élargi $\mathcal{H}'$). *L'espace élargi $\mathcal{H}'$ n'est qu'un outil technique intermédiaire (un « échafaudage ») pour donner un sens trajectorien au mouvement brownien cylindrique. L'intégrale stochastique obtenue est, quant à elle, totalement intrinsèque à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$:*

- **Au niveau élémentaire** : L'évaluation de chaque terme s'écrit $\hat{\Phi}_k \Delta W_k = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\beta_{n,k} \Phi_k e_n$. Cette série ne fait intervenir que la base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{H}$, l'action de Φ_k sur $\mathcal{H}$ et les accroissements réels $\Delta\beta_{n,k}$, sans aucune dépendance envers la géométrie de $\mathcal{H}'$.
- **Au niveau de l'isométrie d'Itô** : L'égalité :

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \Phi(t) dW(t) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 dt \right],$$

montre que la norme dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ de l'intégrale est entièrement fixée par les normes de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Par densité et complétion, la valeur de l'intégrale stochastique dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ est donc strictement indépendante de l'espace régularisant $\mathcal{H}'$ choisi au départ. C'est ce qui justifie l'appellation d'intégrale par rapport au « mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$ ».

Afin d'étendre la définition de l'intégrale stochastique au-delà des processus élémentaires, il est nécessaire d'introduire la notion de prévisibilité. Cette propriété de mesurabilité par rapport à l'histoire passée garantit la non-anticipation du bruit et fournit le cadre fonctionnel adéquat pour prolonger l'isométrie d'Itô par densité.

Définition 3.5 (Tribu prévisible et espace L_{pr}^2). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles et soient $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert séparables.*

1. On appelle **tribu prévisible** sur $[0, T] \times \Omega$, notée $\mathcal{P}$, la σ -algèbre engendrée par la famille des processus adaptés à trajectoires continues à gauche.
2. Un processus stochastique $\Phi: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ est dit **prévisible** s'il est mesurable de $([0, T] \times \Omega, \mathcal{P})$ dans $(\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}), \mathcal{B}(\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})))$.
3. On note $L_{\text{pr}}^2([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ l'espace de Hilbert des classes d'équivalence de processus prévisibles vérifiant :

$$\|\Phi\|_{L_{\text{pr}}^2}^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 dt \right] < \infty,$$

muni du produit scalaire :

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{L_{\text{pr}}^2} = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \Phi(t), \Psi(t) \rangle_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})} dt \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \text{tr}(\Phi(t)\Psi^*(t)) dt \right].$$

Proposition 3.3. *L'ensemble des processus élémentaires est dense dans l'espace de Hilbert $L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$.*

Idée de la démonstration. La démarche classique se déroule en deux étapes :

1. **Cas scalaire :** La tribu prévisible $\mathcal{P}$ est engendrée par la classe des rectangles prévisibles de la forme $\{0\} \times F_0$ avec $F_0 \in \mathcal{F}_0$ et $]s, t] \times F$ avec $0 \leq s < t \leq T$ et $F \in \mathcal{F}_s$. Par le théorème de la classe monotone (ou lemme π - λ de Dynkin, voir Kallenberg [11, Théorème 1.1]), l'ensemble des combinaisons linéaires d'indicatrices $\mathbf{1}_{]s, t] \times F}$ est dense dans $L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{P}, dt \otimes \mathbb{P})$.
2. **Passage aux opérateurs :** Tout processus $\Phi \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ peut être approché par projection orthogonale sur les sous-espaces de dimension finie engendrés par une base hilbertienne de l'espace séparable $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. En combinant l'approximation scalaire des coefficients sur chaque composante avec le théorème de convergence dominée, on en déduit que le processus Φ est limite dans L^2_{pr} d'une suite de processus élémentaires.

Pour une démonstration détaillée, on pourra consulter Prévôt et Röckner [13, Proposition 2.3.8]. $\square$

On a donc le corollaire fondamental suivant :

Corollaire 3.2 (Extension de l'intégrale stochastique à L^2_{pr}). *L'intégrale stochastique $\Phi \mapsto \int_0^T \Phi(t) dW(t)$, définie sur les processus élémentaires, se prolonge de façon unique en une isométrie linéaire continue :*

$$I : L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})) \longrightarrow L^2(\Omega; \mathcal{K}).$$

En particulier, pour tout processus $\Phi \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$, la variable aléatoire $\int_0^T \Phi(t) dW(t)$ est centrée :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \Phi(t) dW(t) \right] = 0,$$

et l'isométrie d'Itô reste vérifiée sous forme quadratique et polarisée : pour tous $\Phi, \Psi \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$,

$$\mathbb{E} \left[\left\langle \int_0^T \Phi(t) dW(t), \int_0^T \Psi(t) dW(t) \right\rangle_{\mathcal{K}} \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \Phi(t), \Psi(t) \rangle_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})} dt \right],$$

d'où pour $\Phi = \Psi$:

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_0^T \Phi(t) dW(t) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 dt \right].$$

Démonstration. Notons $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel des processus élémentaires dans $L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$.

Étape 1 : Isométrie sur le sous-espace dense.

D'après la Définition 3.4, l'intégrale stochastique définit une application linéaire $I : \mathcal{E} \rightarrow L^2(\Omega; \mathcal{K})$ par :

$$I(\Phi) = \int_0^T \Phi(t) dW(t).$$

Pour tout $\Phi \in \mathcal{E}$, l'espérance vérifie $\mathbb{E}[I(\Phi)] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\hat{\Phi}_k \Delta W_k \mid \mathcal{F}_{t_k}]] = 0$. De plus, d'après la Proposition 3.2, cette application est une isométrie : pour tout $\Phi \in \mathcal{E}$,

$$\|I(\Phi)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{K})} = \|\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}}.$$

L'application I est donc lipschitzienne (de constante 1), en particulier uniformément continue sur $\mathcal{E}$.

Étape 2 : Prolongement par densité et complétion.

D'après la Proposition 3.3, le sous-espace $\mathcal{E}$ est dense dans l'espace de Hilbert complet $L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$.

L'espace d'arrivée $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ étant lui-même un espace de Hilbert complet, le théorème de prolongement des applications continues (théorème B.L.T.) garantit que I se prolonge de façon unique en une application linéaire continue sur l'espace $L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ tout entier.

Étape 3 : Caractérisation séquentielle et indépendance de l'approximation.

Concrètement, soit $\Phi \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$. Par densité, il existe une suite de processus élémentaires $(\Phi_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}$ convergeant vers Φ dans L^2_{pr} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n - \Phi\|_{L^2_{\text{pr}}} = 0.$$

Puisque I est une isométrie sur $\mathcal{E}$, la suite image $(I(\Phi_n))_{n \geq 1}$ vérifie :

$$\|I(\Phi_n) - I(\Phi_m)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{K})} = \|\Phi_n - \Phi_m\|_{L^2_{\text{pr}}} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

La suite $(I(\Phi_n))_{n \geq 1}$ est donc de Cauchy dans l'espace complet $L^2(\Omega; \mathcal{K})$, d'où l'existence de la limite :

$$\int_0^T \Phi(t) dW(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \Phi_n(t) dW(t) \quad \text{dans } L^2(\Omega; \mathcal{K}).$$

Cette limite est indépendante de la suite approchante choisie : si $(\tilde{\Phi}_n)_{n \geq 1}$ est une autre suite élémentaire convergeant vers Φ , alors :

$$\|I(\Phi_n) - I(\tilde{\Phi}_n)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{K})} = \|\Phi_n - \tilde{\Phi}_n\|_{L^2_{\text{pr}}} \leq \|\Phi_n - \Phi\|_{L^2_{\text{pr}}} + \|\Phi - \tilde{\Phi}_n\|_{L^2_{\text{pr}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Étape 4 : Conservation de l'isométrie et centrage.

Par continuité de la norme sur $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ et de la norme L^2_{pr} , le passage à la limite préserve l'isométrie :

$$\left\| \int_0^T \Phi(t) dW(t) \right\|_{L^2(\Omega; \mathcal{K})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|I(\Phi_n)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{K})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n\|_{L^2_{\text{pr}}} = \|\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}}.$$

Par identité de polarisation, l'isométrie préserve les produits scalaires hilbertiens. Enfin, la convergence dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ entraînant la convergence dans $L^1(\Omega; \mathcal{K})$, on a :

$$\mathbb{E}[I(\Phi)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I(\Phi_n)] = 0,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 16 (Propriétés de martingale et cas d'un intégrande déterministe). *Deux propriétés remarquables de l'intégrale stochastique prolongée méritent d'être soulignées :*

1. **Processus intégrale et propriété de martingale** : Pour tout $\Phi \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$, le processus indéfini $M(t) = \int_0^t \Phi(s) dW(s)$ (défini par $M(t) = I(\Phi \mathbf{1}_{[0, t]})$) est une martingale de carré intégrable dans $\mathcal{K}$ par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, admettant une modification à trajectoires presque sûrement continues. En particulier, elle vérifie l'inégalité maximale de Doob :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t \Phi(s) dW(s) \right\|_{\mathcal{K}}^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 dt \right].$$

2. **Loi gaussienne pour un intégrande déterministe** : Si le processus $\Phi(t) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ est déterministe (c'est-à-dire indépendant de ω), alors l'intégrale stochastique $I(T) = \int_0^T \Phi(t) dW(t)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée sur l'espace de Hilbert $\mathcal{K}$. En effet, pour des fonctions étagées déterministes, $I(\Phi)$ est une combinaison linéaire finie d'accroissements gaussiens indépendants, donc gaussienne ; la propriété subsiste à la limite par le Lemme 2.1 et la Définition 2.7.

Disposant désormais d'une intégrale stochastique rigoureusement définie sur L^2_{pr} , nous pouvons expliciter la structure spatiale de sa covariance.

Proposition 3.4 (Opérateur de covariance de l'intégrale). *Soit $\Phi \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$. L'intégrale $I(T) = \int_0^T \Phi(t) dW(t)$ est centrée et de carré intégrable dans $\mathcal{K}$.*

Son opérateur de covariance $Q_T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{K})$, caractérisé de manière unique par l'identité :

$$\langle Q_T x, y \rangle_{\mathcal{K}} = \mathbb{E} [\langle I(T), x \rangle_{\mathcal{K}} \langle I(T), y \rangle_{\mathcal{K}}], \quad \forall x, y \in \mathcal{K},$$

est auto-adjoint, positif, à trace, et s'exprime par l'intégrale de Bochner :

$$Q_T = \mathbb{E} \left[\int_0^T \Phi(t) \Phi^*(t) dt \right].$$

En particulier, sa trace coïncide avec la variance totale du processus : $\text{tr}(Q_T) = \mathbb{E} [\|I(T)\|_{\mathcal{K}}^2]$.

Démonstration. Étape 1 : Cas d'un processus élémentaire.

Supposons dans un premier temps que Φ est un processus élémentaire :

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t).$$

D'après la Définition 3.4, l'intégrale stochastique s'écrit $I(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\Phi}_k \Delta W_k$. Pour tous vecteurs $x, y \in \mathcal{K}$, développons le produit des projections scalaires :

$$\mathbb{E} [\langle I(T), x \rangle_{\mathcal{K}} \langle I(T), y \rangle_{\mathcal{K}}] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [\langle \hat{\Phi}_k \Delta W_k, x \rangle_{\mathcal{K}} \langle \hat{\Phi}_k \Delta W_k, y \rangle_{\mathcal{K}}] + \sum_{j \neq k} \mathbb{E} [\langle \hat{\Phi}_j \Delta W_j, x \rangle_{\mathcal{K}} \langle \hat{\Phi}_k \Delta W_k, y \rangle_{\mathcal{K}}].$$

Pour $j < k$, en conditionnant par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{t_k}$, l'indépendance et le caractère centré de l'accroissement ΔW_k garantissent l'annulation de tous les termes croisés exactement comme dans la démonstration de l'isométrie d'Itô (Proposition 3.2).

Pour les termes diagonaux, rappelons que $\hat{\Phi}_k \Delta W_k = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \Delta \beta_{m,k} \Phi_k e_m$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$. Par continuité du produit scalaire et indépendance des $(\Delta \beta_{m,k})_{m \geq 1}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\langle \hat{\Phi}_k \Delta W_k, x \rangle_{\mathcal{K}} \langle \hat{\Phi}_k \Delta W_k, y \rangle_{\mathcal{K}} \mid \mathcal{F}_{t_k}] &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} [(\Delta \beta_{m,k})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k}] \langle \Phi_k e_m, x \rangle_{\mathcal{K}} \langle \Phi_k e_m, y \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= (t_{k+1} - t_k) \sum_{m=1}^{\infty} \langle e_m, \Phi_k^* x \rangle_{\mathcal{H}} \langle \Phi_k^* y, e_m \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Par l'identité de Parseval dans $\mathcal{H}$ sur la base orthonormée $(e_m)_{m \geq 1}$ et par définition de l'opérateur adjoint hilbertien, la série s'identifie à :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \langle \Phi_k^* x, e_m \rangle_{\mathcal{H}} \langle \Phi_k^* y, e_m \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi_k^* x, \Phi_k^* y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi_k \Phi_k^* x, y \rangle_{\mathcal{K}}.$$

En prenant l'espérance totale et en sommant sur k , il vient :

$$\mathbb{E} [\langle I(T), x \rangle_{\mathcal{K}} \langle I(T), y \rangle_{\mathcal{K}}] = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \mathbb{E} [\langle \Phi_k \Phi_k^* x, y \rangle_{\mathcal{K}}] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \Phi(t) \Phi^*(t) x, y \rangle_{\mathcal{K}} dt \right].$$

La formule est donc établie pour tout processus élémentaire.

Étape 2 : Extension par densité à L_{pr}^2 .

Soit maintenant $\Phi \in L_{\text{pr}}^2([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$. D'après la Proposition 3.3, il existe une suite de processus élémentaires $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers Φ dans L_{pr}^2 , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi_n(t) - \Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 dt \right] = 0.$$

Notons $I_n(T) = \int_0^T \Phi_n(t) dW(t)$. Par construction de l'intégrale stochastique (Corollaire 3.2), $I_n(T) \rightarrow I(T)$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{K})$.

— **Convergence du membre de gauche :** L'application bilinéaire $(u, v) \mapsto \mathbb{E}[\langle u, x \rangle_{\mathcal{K}} \langle v, y \rangle_{\mathcal{K}}]$ étant continue sur $L^2(\Omega; \mathcal{K}) \times L^2(\Omega; \mathcal{K})$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\langle I_n(T), x \rangle_{\mathcal{K}} \langle I_n(T), y \rangle_{\mathcal{K}}] = \mathbb{E} [\langle I(T), x \rangle_{\mathcal{K}} \langle I(T), y \rangle_{\mathcal{K}}].$$

- **Convergence du membre de droite :** Pour tous opérateurs $A, B \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, l'identité $AA^* - BB^* = (A - B)A^* + B(A^* - B^*)$ et la majoration de la norme trace par le produit des normes de Hilbert-Schmidt donnent :

$$\|AA^* - BB^*\|_{\mathcal{L}_1(\mathcal{K})} \leq \|A - B\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})} (\|A\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})} + \|B\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}).$$

En intégrant sur $[0, T] \times \Omega$ avec $A = \Phi_n(t)$ et $B = \Phi(t)$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi_n(t)\Phi_n^*(t) - \Phi(t)\Phi^*(t)\|_{\mathcal{L}_1(\mathcal{K})} dt \right] \leq \|\Phi_n - \Phi\|_{L^2_{\text{pr}}} \left(\|\Phi_n\|_{L^2_{\text{pr}}} + \|\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puisque $|\langle (\Phi_n(t)\Phi_n^*(t) - \Phi(t)\Phi^*(t))x, y \rangle_{\mathcal{K}}| \leq \|\Phi_n(t)\Phi_n^*(t) - \Phi(t)\Phi^*(t)\|_{\mathcal{L}_1(\mathcal{K})} \|x\|_{\mathcal{K}} \|y\|_{\mathcal{K}}$, le passage à la limite sous l'intégrale est justifié :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \Phi_n(t)\Phi_n^*(t)x, y \rangle_{\mathcal{K}} dt \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \Phi(t)\Phi^*(t)x, y \rangle_{\mathcal{K}} dt \right].$$

L'identité $\mathbb{E} [\langle I(T), x \rangle_{\mathcal{K}} \langle I(T), y \rangle_{\mathcal{K}}] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \Phi(t)\Phi^*(t)x, y \rangle_{\mathcal{K}} dt \right]$ est donc vraie pour tout $\Phi \in L^2_{\text{pr}}$.

Étape 3 : Identification de l'opérateur Q_T par Bochner.

L'espace des opérateurs à trace $\mathcal{L}_1(\mathcal{K})$ sur l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{K}$ étant lui-même un espace de Banach séparable, et le processus $t \mapsto \Phi(t)\Phi^*(t)$ étant intégrable dans $\mathcal{L}_1(\mathcal{K})$ puisque $\mathbb{E} \left[\int_0^T \|\Phi(t)\Phi^*(t)\|_{\mathcal{L}_1(\mathcal{K})} dt \right] = \|\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}}^2 < \infty$, l'opérateur :

$$Q_T = \mathbb{E} \left[\int_0^T \Phi(t)\Phi^*(t) dt \right],$$

est bien défini au sens de Bochner dans $\mathcal{L}_1(\mathcal{K})$. La commutation de la forme linéaire continue $A \mapsto \langle Ax, y \rangle_{\mathcal{K}}$ avec l'intégrale de Bochner donne :

$$\langle Q_T x, y \rangle_{\mathcal{K}} = \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \Phi(t)\Phi^*(t)x, y \rangle_{\mathcal{K}} dt \right] = \mathbb{E} [\langle I(T), x \rangle_{\mathcal{K}} \langle I(T), y \rangle_{\mathcal{K}}].$$

Enfin, la trace commutant également avec l'intégrale de Bochner, on obtient directement $\text{tr}(Q_T) = \|\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}}^2 = \mathbb{E}[\|I(T)\|_{\mathcal{K}}^2]$. $\square$

Cette proposition nous sera très utile par la suite, car elle permet d'intervertir l'intégrale stochastique avec l'action d'un opérateur linéaire borné.

Proposition 3.5 (Commutation avec les opérateurs linéaires continus). *Soient $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ et $\mathcal{U}$ trois espaces de Hilbert séparables, et soit W un mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$.*

Pour tout processus $\Phi \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$ et tout opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{U})$, le processus composé $T\Phi$ appartient à $L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{U}))$, et on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$T \left(\int_0^t \Phi(s) dW(s) \right) = \int_0^t T\Phi(s) dW(s) \quad \text{presque sûrement dans } \mathcal{U}.$$

En particulier, pour tout vecteur $y \in \mathcal{K}$, en choisissant la forme linéaire continue $T = \langle \cdot, y \rangle_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$, la projection scalaire commute avec l'intégrale :

$$\left\langle \int_0^t \Phi(s) dW(s), y \right\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \langle \Phi(s)e_m, y \rangle_{\mathcal{K}} d\beta_m(s) \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

où $(e_m)_{m \geq 1}$ est une base hilbertienne quelconque de $\mathcal{H}$ et $\beta_m(s) = W(s)(e_m)$.

Démonstration. Étape 1 : Appartenance de $T\Phi$ à L^2_{pr} .

Par la propriété de sous-multiplicité de la norme de Hilbert-Schmidt ($\|AB\|_{\text{HS}} \leq \|A\|_{\mathcal{L}} \|B\|_{\text{HS}}$), on a pour presque tout (s, ω) :

$$\|T\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{U})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{U})} \|\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}.$$

En intégrant en temps et sous l'espérance, il vient $\|T\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{U})} \|\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}} < \infty$. Le processus $T\Phi$ est prévisible et appartient donc bien à $L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{U}))$.

Étape 2 : Cas d'un processus élémentaire.

Si $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_k \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t)$ est élémentaire (Définition 3.3), l'intégrale est une somme finie. Pour chaque terme, par continuité et linéarité de T , on a dans $L^2(\Omega; \mathcal{U})$:

$$T(\hat{\Phi}_k \Delta W_k) = T\left(\sum_{m=1}^{\infty} \Delta \beta_{m,k} \Phi_k e_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta \beta_{m,k} T(\Phi_k e_m) = \widehat{(T\Phi_k)} \Delta W_k.$$

Par sommation finie sur k , l'identité $T(\int_0^t \Phi dW) = \int_0^t T\Phi dW$ est donc exacte pour tout processus élémentaire.

Étape 3 : Extension par densité.

Soit $\Phi \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}))$. D'après la Proposition 3.3, il existe une suite de processus élémentaires $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers Φ dans L^2_{pr} . Par l'isométrie d'Itô (Corollaire 3.2) :

$$\int_0^t \Phi_n(s) dW(s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega; \mathcal{K})} \int_0^t \Phi(s) dW(s).$$

L'opérateur T étant continu de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{U}$, l'application $X \mapsto TX$ est continue de $L^2(\Omega; \mathcal{K})$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{U})$. On a donc :

$$T\left(\int_0^t \Phi_n(s) dW(s)\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega; \mathcal{U})} T\left(\int_0^t \Phi(s) dW(s)\right).$$

D'autre part, comme $\|T\Phi_n - T\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}} \|\Phi_n - \Phi\|_{L^2_{\text{pr}}} \rightarrow 0$, l'isométrie d'Itô dans $\mathcal{U}$ assure :

$$\int_0^t T\Phi_n(s) dW(s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega; \mathcal{U})} \int_0^t T\Phi(s) dW(s).$$

Par unicité de la limite dans $L^2(\Omega; \mathcal{U})$, les deux termes coïncident presque sûrement.

Étape 4 : Cas scalaire.

Soit $y \in \mathcal{K}$. Pour chaque entier $m \geq 1$, le processus réel $s \mapsto \langle \Phi(s) e_m, y \rangle_{\mathcal{K}}$ est prévisible et vérifie $|\langle \Phi(s) e_m, y \rangle_{\mathcal{K}}| \leq \|\Phi(s)\|_{\text{HS}} \|y\|_{\mathcal{K}} \in L^2([0, t] \times \Omega)$. L'intégrale stochastique réelle $I_m(t) := \int_0^t \langle \Phi(s) e_m, y \rangle_{\mathcal{K}} d\beta_m(s)$ est donc bien définie et satisfait l'isométrie d'Itô unidimensionnelle :

$$\mathbb{E}[|I_m(t)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \langle \Phi(s) e_m, y \rangle_{\mathcal{K}}^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \langle e_m, \Phi^*(s) y \rangle_{\mathcal{H}}^2 ds\right].$$

Les browniens $(\beta_m)_{m \geq 1}$ étant indépendants, les intégrales $(I_m(t))_{m \geq 1}$ sont orthogonales dans $L^2(\Omega)$ ($\mathbb{E}[I_m(t) I_j(t)] = 0$ pour $m \neq j$). Pour tout $M \geq 1$, la variance de la somme partielle vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{m=1}^M I_m(t)\right|^2\right] = \sum_{m=1}^M \mathbb{E}[|I_m(t)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sum_{m=1}^M \langle e_m, \Phi^*(s) y \rangle_{\mathcal{H}}^2 ds\right].$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli et l'identité de Parseval dans $\mathcal{H}$ sur la base orthonormée $(e_m)_{m \geq 1}$, le membre de droite converge lorsque $M \rightarrow \infty$ vers :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[|I_m(t)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\Phi^*(s) y\|_{\mathcal{H}}^2 ds\right] \leq \|y\|_{\mathcal{K}}^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K})}^2 ds\right] = \|y\|_{\mathcal{K}}^2 \|\Phi\|_{L^2_{\text{pr}}}^2 < \infty.$$

La série de variables aléatoires orthogonales $\sum_{m=1}^{\infty} I_m(t)$ est donc de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, et converge ainsi vers un élément bien défini de $L^2(\Omega)$.

Enfin, pour tout processus élémentaire $\Phi \in \mathcal{E}$, l'identité $\langle \int_0^t \Phi dW, y \rangle_{\mathcal{K}} = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(t)$ découle directement de la Définition 3.4. Par densité de $\mathcal{E}$ dans L^2_{pr} (Proposition 3.3) et continuité des deux applications dans $L^2(\Omega)$, cette égalité s'étend dans $L^2(\Omega)$ à tout processus $\Phi \in L^2_{\text{pr}}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

L'approche fonctionnelle développée ici s'avère particulièrement puissante pour traiter l'intégrale stochastique dans des espaces abstraits de dimension infinie. Disposant désormais d'un cadre d'intégration rigoureux, nous pouvons l'appliquer à la résolution d'équations différentielles partielles stochastiques. Pour ce faire, nous allons maintenant introduire la théorie des semi-groupes linéaires, outil fondamental qui nous permettra de formaliser l'opérateur de la chaleur déterministe et de définir rigoureusement la notion de solution *mild* stochastique.

4 Théorie des Semi-groupes et Équation de la Chaleur Stochastique

Dans cette section, nous introduisons la théorie des semi-groupes linéaires appliquée à l'opérateur de Laplace, avant d'établir l'existence et l'unicité d'une solution *mild* de l'équation de la chaleur stochastique via la formule de Duhamel.

4.1 Rappels sur la théorie des Semi-groupes

Cette sous-partie introduit les concepts fondamentaux de la théorie des semi-groupes, outils essentiels de l'analyse fonctionnelle pour l'étude des équations d'évolution linéaires déterministes. En nous appuyant sur l'approche de L. C. Evans [5, Section 7.4], nous posons les définitions clés et les propriétés structurelles nécessaires pour aborder le cadre stochastique.

Dans toute la suite, $\mathcal{B}$ désigne un espace de Banach réel. L'objectif de la théorie des semi-groupes est de formaliser rigoureusement l'opérateur de flot associé à l'équation d'évolution abstraite :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathcal{B}$ est une condition initiale donnée et A est un opérateur linéaire défini sur un domaine dense $D(A) \subset \mathcal{B}$. La famille d'opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ vise alors à représenter l'application solution $u(t) = S(t)u_0$.

Définition 4.1 (C_0 -semi-groupe). Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire $S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ pour tout $t \geq 0$) est appelée un **semi-groupe fortement continu** (ou **C_0 -semi-groupe**) si elle vérifie :

1. $S(0) = \text{Id}_{\mathcal{B}}$;
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tous $t, s \geq 0$;
3. pour tout $u \in \mathcal{B}$, l'application $t \mapsto S(t)u$ est continue de $[0, \infty[$ dans $\mathcal{B}$ (continuité forte), ce qui équivaut à $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)u - u\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Définition 4.2 (Semi-groupe contractant). On dit que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe contractant si, en plus d'être un semi-groupe, il vérifie $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, $\|S(t)u\|_{\mathcal{B}} \leq \|u\|_{\mathcal{B}}$ pour tout $t \geq 0$ et tout $u \in \mathcal{B}$.

Définition 4.3 (Générateur infinitésimal). Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de contractions (ou plus généralement un C_0 -semi-groupe) sur $\mathcal{B}$. On définit son domaine $D(A)$ par :

$$D(A) := \left\{ u \in \mathcal{B} \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe dans } \mathcal{B} \right\},$$

et pour tout $u \in D(A)$, l'opérateur $A: D(A) \rightarrow \mathcal{B}$ par :

$$Au := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}.$$

L'opérateur $(A, D(A))$ est appelé le **générateur infinitésimal** du semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

À partir de maintenant, on suppose que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe contractant sur $\mathcal{B}$.

Théorème 4.1 (Propriétés différentielles des semi-groupes). Pour tout $u \in D(A)$, on a :

1. $S(t)u \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$;
2. $AS(t)u = S(t)Au$ pour tout $t \geq 0$;
3. l'application $t \mapsto S(t)u$ est différentiable sur $]0, \infty[$ (et dérivable à droite en $t = 0$) ;
4. $\frac{d}{dt} S(t)u = AS(t)u = S(t)Au$ pour tout $t > 0$.

Démonstration. Points (1) et (2) : Soit $u \in D(A)$ et $t \geq 0$. Par la propriété de semi-groupe, on a pour tout $s > 0$:

$$\frac{S(s) - \text{Id}}{s} S(t)u = \frac{S(t+s)u - S(t)u}{s} = S(t) \left(\frac{S(s)u - u}{s} \right).$$

Puisque $u \in D(A)$, le taux d'accroissement $\frac{S(s)u - u}{s}$ converge vers Au dans $\mathcal{B}$ lorsque $s \rightarrow 0^+$. L'opérateur $S(t)$ étant linéaire et borné (donc continu sur $\mathcal{B}$), il vient :

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{S(s) - \text{Id}}{s} S(t)u = S(t)Au.$$

Cette limite existant dans $\mathcal{B}$, la définition du générateur infinitésimal assure que $S(t)u \in D(A)$ et que $AS(t)u = S(t)Au$.

Points (3) et (4) : Soit $u \in D(A)$ et $t > 0$. Étudions les dérivées à droite et à gauche.

Dérivée à droite : Pour tout $h > 0$, la linéarité et la continuité de $S(t)$ donnent immédiatement :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t) \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} \right) = S(t)Au.$$

Cette relation reste valable en $t = 0$, ce qui prouve la dérivabilité à droite en 0.

Dérivée à gauche : Pour $0 < h < t$, décomposons le taux d'accroissement sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au &= S(t-h) \left(\frac{S(h)u - u}{h} \right) - S(t)Au \\ &= S(t-h) \left(\frac{S(h)u - u}{h} - Au \right) + (S(t-h)Au - S(t)Au). \end{aligned}$$

En passant à la norme dans $\mathcal{B}$, l'inégalité triangulaire et la propriété de contraction ($\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq 1$) donnent :

$$\left\| \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right\|_{\mathcal{B}} \leq \left\| \frac{S(h)u - u}{h} - Au \right\|_{\mathcal{B}} + \|S(t-h)Au - S(t)Au\|_{\mathcal{B}}.$$

Lorsque $h \rightarrow 0^+$:

- le premier terme tend vers 0 par définition de Au pour $u \in D(A)$;
- le second terme tend vers 0 par continuité forte du semi-groupe appliquée au vecteur $Au \in \mathcal{B}$.

Le taux d'accroissement à gauche converge donc également vers $S(t)Au$. Les dérivées à gauche et à droite coïncident pour tout $t > 0$, ce qui établit que l'application $t \mapsto S(t)u$ est différentiable sur $]0, \infty[$ et satisfait $\frac{d}{dt}S(t)u = S(t)Au = AS(t)u$. $\square$

Remarque 17. Puisque $u \in D(A)$, le vecteur Au appartient à $\mathcal{B}$. Par continuité forte du semi-groupe, l'application $t \mapsto S(t)(Au)$ est donc continue de $[0, \infty[$ dans $\mathcal{B}$. Comme $\frac{d}{dt}S(t)u = S(t)Au$, il s'ensuit que la trajectoire $t \mapsto S(t)u$ est en réalité de classe $\mathcal{C}^1([0, \infty[; \mathcal{B})$ (avec dérivabilité à droite en 0).

Théorème 4.2 (Propriétés du générateur infinitésimal). Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de contractions sur $\mathcal{B}$ et soit A son générateur infinitésimal. Alors :

1. le domaine $D(A)$ est dense dans $\mathcal{B}$;
2. A est un opérateur fermé.

Démonstration. **Point (1) : Densité de $D(A)$ dans $\mathcal{B}$.**

Soit $u \in \mathcal{B}$. Pour tout $t > 0$, l'application $s \mapsto S(s)u$ étant continue sur $[0, t]$, elle est intégrable au sens de Bochner. Posons :

$$u^t := \int_0^t S(s)u \, ds \in \mathcal{B}.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions continues à valeurs dans un espace de Banach, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u^t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)u \, ds = S(0)u = u.$$

Montrons que $u^t \in D(A)$. Soit $r > 0$. L'opérateur $S(r)$ étant linéaire continu, il commute avec l'intégrale de Bochner :

$$S(r)u^t = S(r) \left(\int_0^t S(s)u \, ds \right) = \int_0^t S(r)S(s)u \, ds = \int_0^t S(s+r)u \, ds.$$

Par le changement de variable $v = s + r$, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{S(r)u^t - u^t}{r} &= \frac{1}{r} \left(\int_r^{t+r} S(v)u \, dv - \int_0^t S(s)u \, ds \right) \\ &= \frac{1}{r} \int_t^{t+r} S(s)u \, ds - \frac{1}{r} \int_0^r S(s)u \, ds.\end{aligned}$$

Lorsque $r \rightarrow 0^+$, la continuité de la trajectoire donne :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{S(r)u^t - u^t}{r} = S(t)u - S(0)u = S(t)u - u.$$

Cette limite existant dans $\mathcal{B}$, la définition du générateur infinitésimal assure que $u^t \in D(A)$ et que $Au^t = S(t)u - u$.

Par suite, $\frac{1}{t}u^t \in D(A)$ pour tout $t > 0$. Comme $\frac{1}{t}u^t \rightarrow u$ dans $\mathcal{B}$ lorsque $t \rightarrow 0^+$, tout élément $u \in \mathcal{B}$ est limite d'éléments de $D(A)$, ce qui établit la densité de $D(A)$ dans $\mathcal{B}$.

Point (2) : Fermeture de l'opérateur A .

Considérons une suite $(u_k)_{k \geq 1} \subset D(A)$ telle que $u_k \rightarrow u$ et $Au_k \rightarrow v$ dans $\mathcal{B}$. Il s'agit d'établir que $u \in D(A)$ et $Au = v$.

Pour chaque entier $k \geq 1$, la trajectoire $s \mapsto S(s)u_k$ est de classe $\mathcal{C}^1([0, \infty[; \mathcal{B})$ d'après le Théorème 4.1, avec $\frac{d}{ds}S(s)u_k = S(s)Au_k$. En intégrant entre 0 et $t > 0$, on obtient :

$$S(t)u_k - u_k = \int_0^t S(s)Au_k \, ds.$$

Faisons tendre $k \rightarrow \infty$:

- Par continuité de $S(t)$, le membre de gauche converge dans $\mathcal{B}$ vers $S(t)u - u$.
- Pour le membre de droite, la contraction du semi-groupe ($\|S(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq 1$) entraîne :

$$\sup_{s \in [0, t]} \|S(s)Au_k - S(s)v\|_{\mathcal{B}} \leq \sup_{s \in [0, t]} \|S(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \|Au_k - v\|_{\mathcal{B}} \leq \|Au_k - v\|_{\mathcal{B}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

La suite d'intégrandes converge uniformément sur $[0, t]$, ce qui assure la convergence de l'intégrale de Bochner vers $\int_0^t S(s)v \, ds$.

On en déduit l'identité pour tout $t > 0$:

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)v \, ds.$$

En divisant par t et en faisant tendre $t \rightarrow 0^+$, le théorème fondamental de l'analyse donne :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)v \, ds = S(0)v = v.$$

Par définition du générateur, on conclut que $u \in D(A)$ et $Au = v$, ce qui prouve que A est un opérateur fermé. $\square$

Proposition 4.1 (Unicité du semi-groupe engendré). *Soit $A : D(A) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur linéaire. Il existe au plus un semi-groupe de contractions admettant A pour générateur infinitésimal.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux semi-groupes $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admettant le même générateur infinitésimal A .

Soient $t > 0$ et $u \in D(A)$ fixés. Considérons l'application $\psi : [0, t] \rightarrow \mathcal{B}$ définie par :

$$\psi(s) = S(t-s)T(s)u, \quad \forall s \in [0, t].$$

L'application ψ est continue sur $[0, t]$ d'après la continuité forte de S et T et la propriété de contraction ($\|\psi(s+h) - \psi(s)\|_{\mathcal{B}} \leq \|T(s+h)u - T(s)u\|_{\mathcal{B}} + \|S(t-s-h)T(s)u - S(t-s)T(s)u\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$). Montrons qu'elle est dérivable sur $]0, t[$.

Pour $s \in]0, t[$ et $h \neq 0$ suffisamment petit, décomposons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}\frac{\psi(s+h) - \psi(s)}{h} &= \frac{S(t-s-h)T(s+h)u - S(t-s)T(s)u}{h} \\ &= S(t-s-h) \left(\frac{T(s+h)u - T(s)u}{h} \right) + \left(\frac{S(t-s-h) - S(t-s)}{h} \right) T(s)u.\end{aligned}$$

Lorsque $h \rightarrow 0$:

- puisque $u \in D(A)$, le taux d'accroissement de T converge vers $T'(s)u = T(s)Au = AT(s)u$; par continuité de $S(t-s)$, le premier terme converge vers $S(t-s)AT(s)u$;
- puisque $T(s)u \in D(A)$ d'après le Théorème 4.1, le taux d'accroissement de S en $\tau = t-s$ converge vers $-S'(\tau)T(s)u = -AS(t-s)T(s)u = -S(t-s)AT(s)u$.

En sommant ces deux contributions, la dérivée s'annule identiquement sur $]0, t[$:

$$\psi'(s) = S(t-s)AT(s)u - S(t-s)AT(s)u = 0.$$

L'application ψ est donc constante sur $[0, t]$. En évaluant aux bornes, il vient $\psi(t) = \psi(0)$, c'est-à-dire :

$$S(0)T(t)u = S(t)T(0)u \iff T(t)u = S(t)u.$$

Cette égalité est vérifiée pour tout vecteur $u \in D(A)$. Le domaine $D(A)$ étant dense dans $\mathcal{B}$ et les opérateurs $S(t)$ et $T(t)$ étant linéaires continus sur $\mathcal{B}$, un prolongement par densité assure que :

$$S(t) = T(t) \quad \text{sur } \mathcal{B}, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Pour analyser finement le comportement d'un opérateur non borné A , il est souvent plus simple d'étudier l'inversibilité de ses variations décalées d'un paramètre réel. Cela nous conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 4.4. Soit $A: D(A) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach $\mathcal{B}$. On dit qu'un nombre réel λ appartient à l'ensemble résolvant de A , noté $\rho(A)$, si l'opérateur

$$\lambda \text{Id} - A: D(A) \rightarrow \mathcal{B}$$

est bijectif et si son inverse est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{B}$.

Dans ce cas, l'opérateur linéaire borné $R_\lambda := (\lambda \text{Id} - A)^{-1}: \mathcal{B} \rightarrow D(A)$ est appelé l'opérateur résolvant (ou la résolvante) de A associé à λ .

Proposition 4.2. Soit $A: D(A) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur linéaire. Pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $u \in D(A)$, l'opérateur résolvant commute avec A , c'est-à-dire :

$$AR_\lambda u = R_\lambda Au.$$

Démonstration. Soit $u \in D(A)$. Par définition de $D(A)$, on a $(\lambda \text{Id} - A)u \in \mathcal{B}$. En appliquant l'opérateur inverse R_λ à gauche, on obtient par définition de l'inverse :

$$R_\lambda(\lambda \text{Id} - A)u = u.$$

En développant par linéarité de R_λ , on a $\lambda R_\lambda u - R_\lambda Au = u$, ce qui donne :

$$R_\lambda Au = \lambda R_\lambda u - u.$$

Inversement, par définition de l'inverse à droite, on a toujours $(\lambda \text{Id} - A)R_\lambda = \text{Id}_\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}$. En appliquant cet opérateur à l'élément u , il vient $\lambda R_\lambda u - AR_\lambda u = u$, d'où :

$$AR_\lambda u = \lambda R_\lambda u - u.$$

On en conclut que $AR_\lambda u = R_\lambda Au$, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 4.3 (Propriétés de l'opérateur résolvant). Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de contractions sur $\mathcal{B}$ de générateur infinitésimal A . L'opérateur résolvant possède les propriétés suivantes :

1. Pour tous $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a l'identité de la résolvante :

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu.$$

En particulier, les opérateurs résolvants commutent : $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

2. Pour tout $\lambda > 0$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et l'opérateur résolvant est donné par la transformée de Laplace du semi-groupe :

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt, \quad \forall u \in \mathcal{B}.$$

Par conséquent, la résolvante vérifie l'estimation :

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration. Point (1) : Identité de la résolvante et commutativité.

Soient $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Par définition, les opérateurs $(\lambda \text{Id} - A) : D(A) \rightarrow \mathcal{B}$ et $(\mu \text{Id} - A) : D(A) \rightarrow \mathcal{B}$ sont bijectifs d'inverses continus respectifs R_λ et R_μ .

Puisque $\text{Im}(R_\mu) = D(A)$, on a $(\lambda \text{Id} - A)R_\mu = (\lambda - \mu)R_\mu + (\mu \text{Id} - A)R_\mu = (\lambda - \mu)R_\mu + \text{Id}_{\mathcal{B}}$. En appliquant R_λ à gauche, il vient :

$$R_\lambda(\lambda \text{Id} - A)R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu + R_\lambda.$$

Comme $R_\lambda(\lambda \text{Id} - A) = \text{Id}_{D(A)}$ sur $D(A)$ et que $\text{Im}(R_\mu) = D(A)$, le membre de gauche se réduit à R_μ . On obtient donc :

$$R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu + R_\lambda \iff R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu.$$

Par interversion des rôles de λ et μ , on a également $R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda$, soit :

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda.$$

En confrontant ces deux égalités, on a $(\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$. Pour $\lambda \neq \mu$, la simplification par $\mu - \lambda \neq 0$ donne $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ (l'égalité étant triviale si $\lambda = \mu$).

Point (2) : Formule intégrale et estimation de la résolvante.

Soient $\lambda > 0$ et $u \in \mathcal{B}$. Le semi-groupe étant contractant ($\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq 1$), on a la majoration $\|e^{-\lambda t} S(t)u\|_{\mathcal{B}} \leq e^{-\lambda t} \|u\|_{\mathcal{B}}$. Comme $\lambda > 0$, l'application $t \mapsto e^{-\lambda t} S(t)u$ est intégrable au sens de Bochner sur $[0, \infty[$. On pose :

$$I_\lambda u := \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt \in \mathcal{B}.$$

Étape 2.a : Inverse à droite ($I_\lambda u \in D(A)$ et $(\lambda \text{Id} - A)I_\lambda u = u$).

Soit $h > 0$. Par commutation de l'opérateur borné $S(h)$ avec l'intégrale de Bochner :

$$\begin{aligned} \frac{S(h) - \text{Id}}{h} I_\lambda u &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t+h)u dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} S(s)u ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} S(s)u ds - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)u dt. \end{aligned}$$

Lorsque $h \rightarrow 0^+$, le premier terme converge vers $\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)u ds = \lambda I_\lambda u$, tandis que le second terme converge vers $S(0)u = u$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. Cette limite existant dans $\mathcal{B}$, la définition du générateur assure que $I_\lambda u \in D(A)$ et :

$$A I_\lambda u = \lambda I_\lambda u - u \iff (\lambda \text{Id} - A) I_\lambda u = u.$$

Étape 2.b : Inverse à gauche (pour tout $u \in D(A)$, $I_\lambda(\lambda \text{Id} - A)u = u$).

Soit $u \in D(A)$. D'après le Théorème 4.1, l'application $t \mapsto S(t)u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \infty[$ avec $\frac{d}{dt} S(t)u = S(t)Au$. Par intégration par parties sur l'intégrale de Bochner :

$$\begin{aligned} I_\lambda(Au) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Au dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\frac{d}{dt} S(t)u \right) dt \\ &= [e^{-\lambda t} S(t)u]_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u dt \\ &= -u + \lambda I_\lambda u. \end{aligned}$$

On en déduit que $I_\lambda(\lambda \text{Id} - A)u = \lambda I_\lambda u - I_\lambda A u = u$.

L'opérateur $(\lambda \text{Id} - A) : D(A) \rightarrow \mathcal{B}$ est donc inversible d'inverse $R_\lambda = I_\lambda$, ce qui établit que $\lambda \in \rho(A)$.

Étape 2.c : Estimation de la norme.

Par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale de Bochner :

$$\|R_\lambda u\|_{\mathcal{B}} \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|S(t)u\|_{\mathcal{B}} dt \leq \|u\|_{\mathcal{B}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \|u\|_{\mathcal{B}}.$$

En passant à la borne supérieure sur la boule unité $\|u\|_{\mathcal{B}} \leq 1$, on conclut que $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq \frac{1}{\lambda}$. $\square$

Remarque 18 (Interprétation via la transformée de Laplace). *L'égalité $R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$ montre que la résolvante est la transformée de Laplace du semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$.*

Formellement, si l'on applique la transformée de Laplace par rapport au temps $t \geq 0$ à l'équation d'évolution abstraite $u'(t) = Au(t)$ avec $u(0) = u_0$, une intégration par parties donne pour $\hat{u}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t) dt$:

$$\lambda \hat{u}(\lambda) - u_0 = A \hat{u}(\lambda) \iff (\lambda \text{Id} - A) \hat{u}(\lambda) = u_0.$$

Dans le domaine de Laplace, la résolution de l'équation d'évolution se ramène donc à l'inversion d'un opérateur elliptique stationnaire : $\hat{u}(\lambda) = R_\lambda u_0$.

La question réciproque est alors centrale : à quelles conditions nécessaires et suffisantes sur la famille de résolvantes $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ un opérateur fermé A engendre-t-il effectivement un semi-groupe de contractions $\{S(t)\}_{t \geq 0}$? C'est précisément l'objet du théorème fondamental de Hille-Yosida.

Théorème 4.4 (Hille-Yosida). *Soit $A : D(A) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur linéaire, fermé et de domaine dense dans $\mathcal{B}$.*

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si et seulement si $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et :

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Démonstration. Sens direct ($\implies$) : Découle immédiatement du Théorème 4.3.

Sens réciproque ($\impliedby$) : Supposons que $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et que $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$.

Étape 1 : Approximation de Yosida.

Pour tout $\lambda > 0$, définissons l'approximation de Yosida par :

$$A_\lambda := \lambda A R_\lambda = \lambda(\lambda R_\lambda - \text{Id}) = \lambda^2 R_\lambda - \lambda \text{Id}.$$

Puisque $R_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, A_λ est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{B}$.

Soit $u \in D(A)$. Par commutation de A et R_λ sur $D(A)$ (Proposition 4.2), on a :

$$\|\lambda R_\lambda u - u\|_{\mathcal{B}} = \|R_\lambda(Au)\|_{\mathcal{B}} \leq \|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \|Au\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{\lambda} \|Au\|_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Comme $\|\lambda R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq 1$ pour tout $\lambda > 0$ et que $D(A)$ est dense dans $\mathcal{B}$, un argument standard de densité ($\varepsilon/3$) assure que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda u = u, \quad \forall u \in \mathcal{B}.$$

Par conséquent, pour tout $u \in D(A)$, on a $A_\lambda u = \lambda R_\lambda(Au) \rightarrow Au$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

Étape 2 : Semi-groupes approchés $\{S_\lambda(t)\}_{t \geq 0}$.

L'opérateur A_λ étant borné, on définit son semi-groupe par l'exponentielle classique :

$$S_\lambda(t) := e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t \text{Id}} e^{t\lambda^2 R_\lambda} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n}{n!} R_\lambda^n.$$

En utilisant $\|R_\lambda^n\| \leq \|R_\lambda\|^n \leq \lambda^{-n}$, on obtient la propriété de contraction :

$$\|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^n}{n!} \frac{1}{\lambda^n} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Étape 3 : Convergence vers le semi-groupe limite.

Soient $\lambda, \mu > 0$ et $u \in D(A)$. D'après le Théorème 4.3, R_λ et R_μ commutent, donc A_λ , A_μ , $S_\lambda(t)$ et $S_\mu(t)$ commutent mutuellement. Par le théorème fondamental de l'analyse :

$$S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u = \int_0^t \frac{d}{ds} (S_\mu(t-s)S_\lambda(s)u) ds = \int_0^t S_\mu(t-s)S_\lambda(s)(A_\lambda u - A_\mu u) ds.$$

La contraction des semi-groupes approchés entraîne alors :

$$\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\|_{\mathcal{B}} \leq \int_0^t \|A_\lambda u - A_\mu u\|_{\mathcal{B}} ds = t\|A_\lambda u - A_\mu u\|_{\mathcal{B}}.$$

Puisque $(A_\lambda u)_{\lambda>0}$ converge vers Au , la famille $(S_\lambda(t)u)_{\lambda>0}$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}$, uniformément par rapport à t sur tout compact $[0, T]$. Par densité de $D(A)$ et contraction uniforme ($\|S_\lambda(t)\| \leq 1$), la convergence a lieu pour tout $u \in \mathcal{B}$. On peut donc poser :

$$S(t)u := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)u, \quad \forall u \in \mathcal{B}, \forall t \geq 0.$$

La limite préserve la propriété de semi-groupe ($S(t+s) = S(t)S(s)$, $S(0) = \text{Id}_{\mathcal{B}}$) et la contraction ($\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} \leq 1$).

De plus, pour $u \in D(A)$, la convergence uniforme sur $[0, T]$ assure que $t \mapsto S(t)u$ est continue en $t = 0$, ce qui s'étend à tout $u \in \mathcal{B}$ par densité et contraction. La famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est donc un C_0 -semi-groupe de contractions.

Étape 4 : Identification du générateur.

Notons $\tilde{A}: D(\tilde{A}) \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ le générateur infinitésimal de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Pour tout $u \in D(A)$, on a l'identité $S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u ds$. Par l'inégalité triangulaire :

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\|_{\mathcal{B}} \leq \|S_\lambda(s)(A_\lambda u - Au)\|_{\mathcal{B}} + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au\|_{\mathcal{B}} \leq \|A_\lambda u - Au\|_{\mathcal{B}} + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au\|_{\mathcal{B}}.$$

En vertu de l'Étape 1 pour $\|A_\lambda u - Au\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$, et de l'Étape 3 appliquée au vecteur $Au \in \mathcal{B}$ pour le second terme, le membre de droite converge uniformément vers 0 sur $[0, t]$ quand $\lambda \rightarrow \infty$. On en déduit :

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)Au ds.$$

En divisant par t et en faisant tendre $t \rightarrow 0^+$, il vient $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = Au$. Par définition de $\tilde{A}$, cela prouve que $u \in D(\tilde{A})$ et $\tilde{A}u = Au$. Ainsi, $A \subseteq \tilde{A}$.

Pour conclure que $A = \tilde{A}$, fixons $\lambda > 0$. Puisque $\tilde{A}$ est le générateur d'un semi-groupe de contractions, le Théorème 4.3 assure que $\lambda \in \rho(\tilde{A})$, donc $\lambda \text{Id} - \tilde{A}: D(\tilde{A}) \rightarrow \mathcal{B}$ est injectif. Par ailleurs, par hypothèse, $\lambda \text{Id} - A: D(A) \rightarrow \mathcal{B}$ est surjectif.

Soit $v \in D(\tilde{A})$. Par surjectivité de $\lambda \text{Id} - A$, il existe $u \in D(A)$ tel que $(\lambda \text{Id} - A)u = (\lambda \text{Id} - \tilde{A})v$. Comme $A \subseteq \tilde{A}$, on a $(\lambda \text{Id} - \tilde{A})u = (\lambda \text{Id} - \tilde{A})v$, ce qui donne $(\lambda \text{Id} - \tilde{A})(u - v) = 0$. Par injectivité de $\lambda \text{Id} - \tilde{A}$, il vient $u = v \in D(A)$.

On en déduit que $D(\tilde{A}) = D(A)$, et donc $\tilde{A} = A$. □

4.2 Application au Laplacien et à l'équation de la chaleur déterministe

Cette sous-section applique la théorie des semi-groupes à l'équation de la chaleur déterministe. Cette étape illustre le théorème de Hille-Yosida dans un cadre hilbertien concret et introduit la formule de Duhamel, passerelle indispensable vers l'analyse stochastique.

Dans toute la suite, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ désigne un domaine ouvert borné régulier (au moins de classe $\mathcal{C}^2$), et $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$ est l'espace de Hilbert de référence muni de son produit scalaire usuel $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{O}} u(x)v(x) dx$.

Définition 4.5 (Opérateur de Laplace-Dirichlet). *On définit l'opérateur de Laplace-Dirichlet $(\Delta, D(\Delta))$ sur $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$ par son domaine variationnel :*

$$D(\Delta) = \{u \in H_0^1(\mathcal{O}) \mid \Delta u \in L^2(\mathcal{O})\},$$

où $\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i x_i} u$ est calculé au sens des distributions, et pour tout $u \in D(\Delta)$, Δu est identifié à son représentant dans $L^2(\mathcal{O})$.

Remarque 19 (Lien avec la régularité elliptique). Lorsque la frontière $\partial\mathcal{O}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (ou si $\mathcal{O}$ est convexe), le théorème de régularité elliptique globale (voir Evans [5, Théorème 6.3.4] ou Brézis [1, Théorème IX.25]) assure que :

$$D(\Delta) = H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}).$$

La définition variationnelle précédente a toutefois l'avantage d'être intrinsèque et de rendre l'étude fonctionnelle élémentaire et autocontenue.

Proposition 4.3. L'opérateur $(\Delta, D(\Delta))$ est linéaire, à domaine dense dans $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$, et fermé.

Démonstration. Linéarité : Elle découle de la linéarité de la dérivation au sens des distributions.

Densité du domaine : L'espace des fonctions tests $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ est inclus dans $D(\Delta)$. La densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ dans $L^2(\mathcal{O})$ entraîne directement que $D(\Delta)$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Fermeture : Soit $(u_k)_{k \geq 1} \subset D(\Delta)$ une suite telle que $u_k \rightarrow u$ dans $L^2(\mathcal{O})$ et $\Delta u_k \rightarrow v$ dans $L^2(\mathcal{O})$. Montrons que $u \in D(\Delta)$ et $\Delta u = v$.

Étape 1 : Identification de $\Delta u = v$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$, la définition de la dérivation au sens des distributions donne :

$$\int_{\mathcal{O}} (\Delta u_k)(x) \phi(x) dx = \int_{\mathcal{O}} u_k(x) (\Delta \phi)(x) dx.$$

En faisant tendre $k \rightarrow \infty$, la convergence dans $L^2(\mathcal{O})$ entraîne :

$$\int_{\mathcal{O}} v(x) \phi(x) dx = \int_{\mathcal{O}} u(x) (\Delta \phi)(x) dx.$$

Par conséquent, la dérivée faible au sens des distributions de u coïncide avec $v \in L^2(\mathcal{O})$, soit $\Delta u = v$.

Étape 2 : Appartenance de u à $H_0^1(\mathcal{O})$.

Puisque $u_k \in D(\Delta) \subset H_0^1(\mathcal{O})$ et $\Delta u_k \in L^2(\mathcal{O})$, la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ dans $H_0^1(\mathcal{O})$ justifie la formule de Green (intégration par parties dans $H_0^1(\mathcal{O})$) :

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 = -\langle \Delta u_k, u_k \rangle_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Comme $u_k \rightarrow u$ et $\Delta u_k \rightarrow v$ fortement dans $L^2(\mathcal{O})$, la continuité du produit scalaire implique :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla u_k\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 = -\langle v, u \rangle_{L^2(\mathcal{O})} < \infty.$$

La suite $(\nabla u_k)_{k \geq 1}$ est donc bornée dans $L^2(\mathcal{O})$. Par suite, $(u_k)_{k \geq 1}$ est bornée dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\mathcal{O})$.

Par compacité faible dans $H_0^1(\mathcal{O})$, il existe une sous-suite (u_{k_j}) convergeant faiblement dans $H_0^1(\mathcal{O})$ vers une limite $w \in H_0^1(\mathcal{O})$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$, on a $u = w \in H_0^1(\mathcal{O})$.

L'élément u vérifie donc $u \in H_0^1(\mathcal{O})$ et $\Delta u = v \in L^2(\mathcal{O})$. Par définition, $u \in D(\Delta)$ et $\Delta u = v$, ce qui prouve que Δ est fermé. $\square$

Afin d'appliquer le théorème de Hille-Yosida à l'opérateur Laplacien, il convient à présent de vérifier qu'il satisfait l'ensemble des hypothèses requises. L'opérateur étant déjà linéaire, fermé et de domaine dense (Proposition 4.3), il nous reste uniquement à démontrer la majoration de sa résolvante.

Proposition 4.4. Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda \text{Id} - \Delta) : D(\Delta) \rightarrow \mathcal{H}$ est bijectif. De plus, la résolvante associée $R_\lambda(\Delta) = (\lambda \text{Id} - \Delta)^{-1}$ vérifie l'estimation de norme requise par le théorème de Hille-Yosida :

$$\|R_\lambda(\Delta)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration. Soit $\lambda > 0$ et $f \in \mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$. Montrons l'existence et l'unicité d'une solution $u \in D(\Delta)$ à l'équation $(\lambda \text{Id} - \Delta)u = f$ en appliquant le théorème de Lax-Milgram [1, Corollaire V.8] sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\mathcal{O})$, muni de la norme $\|u\|_{H_0^1}^2 = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\nabla u\|_{\mathcal{H}}^2$.

Considérons la forme bilinéaire $a_\lambda : H_0^1(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$a_\lambda(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathcal{H}}.$$

La bilinéarité de a_λ découle de la linéarité du produit scalaire $L^2(\mathcal{O})$ et de l'opérateur gradient.

Continuité et coercivité de a_λ :

— **Continuité** : Pour tous $u, v \in H_0^1(\mathcal{O})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|a_\lambda(u, v)| \leq \lambda \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} + \|\nabla u\|_{\mathcal{H}} \|\nabla v\|_{\mathcal{H}} \leq (\lambda + 1) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}.$$

La forme bilinéaire est donc continue sur $H_0^1(\mathcal{O})$.

— **Coercivité** : Pour tout $u \in H_0^1(\mathcal{O})$:

$$a_\lambda(u, u) = \lambda \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\nabla u\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \min(\lambda, 1) (\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\nabla u\|_{\mathcal{H}}^2) = \alpha \|u\|_{H_0^1}^2,$$

en posant $\alpha = \min(\lambda, 1) > 0$. La forme a_λ est donc coercive.

La forme linéaire $L: v \mapsto \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}}$ est continue sur $H_0^1(\mathcal{O})$ car $|L(v)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{H_0^1}$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\mathcal{O})$ tel que :

$$a_\lambda(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

Appartenance à $D(\Delta)$ et bijectivité :

Pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}) \subset H_0^1(\mathcal{O})$, l'égalité variationnelle donne :

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f - \lambda u, \phi \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Par définition de la dérivation au sens des distributions, $\langle \Delta u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \lambda u - f, \phi \rangle_{\mathcal{H}}$. Par conséquent, la distribution Δu s'identifie à la fonction $\lambda u - f \in L^2(\mathcal{O})$.

Puisque $u \in H_0^1(\mathcal{O})$ et $\Delta u \in L^2(\mathcal{O})$, l'élément u appartient au domaine variationnel $D(\Delta)$ et satisfait $(\lambda \text{Id} - \Delta)u = f$ dans $L^2(\mathcal{O})$. L'opérateur $(\lambda \text{Id} - \Delta): D(\Delta) \rightarrow \mathcal{H}$ est donc surjectif. L'unicité fournie par Lax-Milgram dans $H_0^1(\mathcal{O})$ garantit en outre son injectivité sur $D(\Delta) \subset H_0^1(\mathcal{O})$, d'où sa bijectivité et l'inclusion $]0, \infty[\subset \rho(\Delta)$.

Estimation de la résolvante :

En testant l'égalité variationnelle contre la solution elle-même ($v = u \in H_0^1(\mathcal{O})$) :

$$\lambda \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\nabla u\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle f, u \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Comme $\|\nabla u\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\lambda \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle f, u \rangle_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|u\|_{\mathcal{H}}.$$

Si $\|u\|_{\mathcal{H}} = 0$, la majoration $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{\mathcal{H}}$ est triviale ; si $\|u\|_{\mathcal{H}} > 0$, la simplification par $\|u\|_{\mathcal{H}}$ fournit immédiatement :

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

Comme $u = R_\lambda(\Delta)f$, on en déduit que pour tout $f \in \mathcal{H}$:

$$\|R_\lambda(\Delta)f\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{d'où} \quad \|R_\lambda(\Delta)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

□

Théorème 4.5 (Semi-groupe engendré par l'opérateur de Laplace-Dirichlet). *L'opérateur de Laplace-Dirichlet $(\Delta, D(\Delta))$ vérifie l'ensemble des hypothèses du théorème de Hille-Yosida sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$.*

Par conséquent, il engendre un unique semi-groupe de contractions $(S(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{H}$, noté symboliquement :

$$S(t) = e^{t\Delta}, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Existence : La linéarité, la densité du domaine $D(\Delta)$ dans $\mathcal{H}$ et le caractère fermé de Δ ont été établis à la Proposition 4.3. De plus, la Proposition 4.4 assure que $]0, \infty[\subset \rho(\Delta)$ et fournit la majoration uniforme de la résolvante :

$$\|R_\lambda(\Delta)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Toutes les hypothèses étant vérifiées, le théorème de Hille-Yosida (Théorème 4.4) garantit l'existence d'un semi-groupe de contractions $(S(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{H}$ admettant Δ pour générateur infinitésimal.

Unicité : L'unicité du semi-groupe associé à ce générateur découle directement de la Proposition 4.1. □

Considérons le problème de Cauchy non homogène associé à l'opérateur de Laplace-Dirichlet :

$$\begin{cases} u'(t) = \Delta u(t) + f(t), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1)$$

où $u_0 \in \mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$ est la condition initiale et $f \in L^1([0, T]; \mathcal{H})$ est un terme source donné.

Si f n'est pas régulière (par exemple seulement intégrable en temps), ce problème n'admet généralement pas de solution classique au sens fort (dérivable en temps et à valeurs dans $D(\Delta)$). En multipliant formellement l'équation par le facteur intégrant $e^{-t\Delta}$ et en intégrant entre 0 et t , on obtient la formule de Duhamel, qui motive la définition suivante.

Définition 4.6 (Solution *mild* et formule de Duhamel). *Soient $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L^1([0, T]; \mathcal{H})$. On appelle solution mild du problème de Cauchy (1) toute fonction $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H})$ satisfaisant la formule de Duhamel :*

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Théorème 4.6 (Existence et unicité de la solution *mild* déterministe). *Pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$ et toute source $f \in L^1([0, T]; \mathcal{H})$, le problème d'évolution (1) admet une unique solution mild au sens de la Définition 4.6.*

Démonstration. L'expression de $u(t)$ étant explicitement et uniquement imposée par la formule de Duhamel, l'unicité est immédiate.

Pour établir l'existence, il suffit de vérifier que l'application $u: [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ définie par la formule de Duhamel est bien continue, c'est-à-dire que $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H})$.

Terme homogène : L'application $t \mapsto e^{t\Delta}u_0$ est continue sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ d'après la continuité forte du semi-groupe (Définition du C_0 -semi-groupe).

Terme de convolution : Posons $v(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s) ds$. Soient $t \in [0, T]$ et $h > 0$ tel que $t + h \in [0, T]$. On décompose l'accroissement sous la forme :

$$\begin{aligned} v(t+h) - v(t) &= \int_0^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}f(s) ds - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s) ds \\ &= \int_t^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta}f(s) ds + \int_0^t (e^{h\Delta} - \text{Id})e^{(t-s)\Delta}f(s) ds. \end{aligned}$$

En passant à la norme dans $\mathcal{H}$, la propriété de contraction du semi-groupe ($\|e^{t\Delta}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$) donne :

$$\|v(t+h) - v(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \int_t^{t+h} \|f(s)\|_{\mathcal{H}} ds + \int_0^t \|(e^{h\Delta} - \text{Id})e^{(t-s)\Delta}f(s)\|_{\mathcal{H}} ds.$$

Lorsque $h \rightarrow 0^+$:

- le premier terme tend vers 0 par absolue continuité de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction dans $L^1([0, T])$;
- dans le second terme, pour presque tout $s \in [0, t]$, l'intégrande tend vers 0 par continuité forte du semi-groupe au point $e^{(t-s)\Delta}f(s) \in \mathcal{H}$, et est dominé par $2\|f(s)\|_{\mathcal{H}} \in L^1([0, t])$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure donc que cette intégrale tend vers 0.

Un raisonnement symétrique pour $h < 0$ assure la continuité à gauche. On en déduit que $v \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H})$, et donc que $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{H})$. $\square$

Afin d'illustrer concrètement l'action géométrique et analytique de ce semi-groupe déterministe, nous présentons en Figure 2 une simulation numérique de l'évolution temporelle d'une solution *mild* soumise à une condition initiale discontinue.

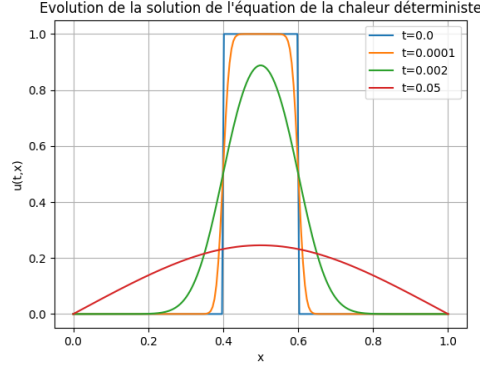


FIGURE 2 – Évolution temporelle de la solution *mild* de l'équation de la chaleur déterministe.

Sur cette simulation, l'état initial ($t = 0$) est choisi sous la forme d'un créneau discontinu. On observe immédiatement l'effet de lissage induit par l'opérateur $e^{t\Delta}$: dès l'instant $t = 0,0001$, les cassures aux bords sont lissées et la solution devient parfaitement lisse sur le domaine. Au cours du temps, le profil s'aplatit et diffuse vers l'état stationnaire, illustrant la nature dissipative du semi-groupe engendré par le Laplacien.

Une fois le cadre déterministe de l'équation de la chaleur et la théorie des semi-groupes bien établis, nous pouvons introduire la perturbation aléatoire. Dans la section suivante, nous combinons ces outils déterministes avec l'intégrale stochastique en dimension infinie pour définir et résoudre l'équation de la chaleur stochastique.

4.3 Solution *mild* et régularité de l'équation de la chaleur stochastique

Nous combinons à présent la théorie des semi-groupes et l'intégration stochastique en dimension infinie. Le bruit blanc spatio-temporel étant trop irrégulier pour définir des dérivées classiques, l'équation de la chaleur stochastique est formulée dans le cadre de Da Prato-Zabczyk [3] comme une équation différentielle abstraite sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$:

$$\begin{cases} du(t) = \Delta u(t) dt + \sigma(u(t)) dW(t), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2)$$

où :

- $W = (W(t))_{t \in [0, T]}$ est le mouvement brownien cylindrique sur $\mathcal{H}$ introduit à la Définition 3.2 ;
- $(\Delta, D(\Delta))$ est l'opérateur de Laplace-Dirichlet (Définition 4.5), générateur infinitésimal du semi-groupe de contractions $(e^{t\Delta})_{t \geq 0}$ (Théorème 4.5) ;
- $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur de diffusion (potentiellement non linéaire), faisant de (2) une équation semi-linéaire.

Hypothèses sur le coefficient de diffusion

En dimension spatiale $d = 1$ sur un intervalle borné $\mathcal{O} = (a, b)$ de longueur $L = b - a$, l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet admet une base propre hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ associée aux valeurs propres $\lambda_n = (n\pi/L)^2 > 0$ (rappelée à la Remarque 21). L'action régularisante instantanée du semi-groupe de la chaleur compense la rugosité spatiale du bruit blanc cylindrique : pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{t\Delta}$ est de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$ et vérifie :

$$\int_0^T \|e^{s\Delta}\|_{\text{HS}}^2 ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\lambda_n T}}{2\lambda_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n} =: M_T < \infty.$$

Par conséquent, pour que l'intégrande de Duhamel $s \mapsto e^{(t-s)\Delta} \sigma(u(s))$ appartienne à $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$, il est suffisant d'imposer que l'opérateur de diffusion σ prenne ses valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Nous formulons les hypothèses classiques de Lipschitz et de croissance linéaire pour la norme d'opérateur :

(H1) Condition de Lipschitz : il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tous $u, v \in \mathcal{H}$:

$$\|\sigma(u) - \sigma(v)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_1 \|u - v\|_{\mathcal{H}}.$$

(H2) Condition de croissance linéaire : il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout $u \in \mathcal{H}$:

$$\|\sigma(u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_2(1 + \|u\|_{\mathcal{H}}).$$

Cette formulation englobe directement le cas canonique du bruit additif ($\sigma \equiv \text{Id}_{\mathcal{H}}$, où $\|\text{Id}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 1$).

Solution *mild* et espace des trajectoires

Faute de régularité spatiale suffisante pour définir une solution forte, on utilise la méthode de la variation de la constante (formule de Duhamel). Pour appliquer un théorème de point fixe, on introduit l'espace de Banach des processus prévisibles continus en moyenne quadratique.

Définition 4.7 (Espace des trajectoires $\mathcal{H}_T$). *Pour tout horizon $T > 0$, on note $\mathcal{H}_T$ l'espace de Banach des processus stochastiques prévisibles $u: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathcal{H}$ tels que l'application $t \mapsto u(t)$ est continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$, muni de la norme :*

$$\|u\|_{\mathcal{H}_T} := \left(\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \|u(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

La formule de Duhamel fait agir le semi-groupe régularisant $e^{(t-s)\Delta}$ sur le bruit, compensant ainsi son irrégularité :

Définition 4.8 (Solution *mild* et formule de Duhamel stochastique). *Soit $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0; \mathcal{H})$ une condition initiale donnée. On appelle solution *mild* de l'équation d'évolution stochastique (2) tout processus $u \in \mathcal{H}_T$ satisfaisant pour tout $t \in [0, T]$ l'équation intégrale :*

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\sigma(u(s))dW(s) \quad \text{presque sûrement dans } \mathcal{H}.$$

Cette relation intégrale constitue la **formule de Duhamel stochastique**.

Remarque 20 (Régularisation par le semi-groupe et intégrabilité Hilbert-Schmidt). *L'intégrale stochastique de la formule de Duhamel n'est pas formelle : elle est bien définie au sens de l'isométrie d'Itô en dimension infinie (Corollaire 3.2) pour $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.*

En effet, pour chaque $t \in [0, T]$ fixé, considérons le processus intégrande $s \mapsto \Phi_t(s) := e^{(t-s)\Delta}\sigma(u(s))\mathbf{1}_{[0, t]}(s)$.

1. **Caractère Hilbert-Schmidt de l'intégrande :** *L'opérateur $\sigma(u(s))$ est linéaire borné sur $\mathcal{H}$ ($\sigma(u(s)) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$). En dimension $d = 1$, le semi-groupe de la chaleur fournit une régularisation instantanée : pour tout $s < t$, l'opérateur $e^{(t-s)\Delta}$ est de classe Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$. La structure d'idéal bilatère de $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ garantit alors :*

$$\|\Phi_t(s)\|_{\text{HS}} = \|e^{(t-s)\Delta}\sigma(u(s))\|_{\text{HS}} \leq \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}} \|\sigma(u(s))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

2. **Appartenance à l'espace L^2_{pr} :** *En exploitant la condition de croissance linéaire (H2) sur la norme d'opérateur ($\|\sigma(u(s))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \leq 2C_2^2(1 + \|u(s)\|_{\mathcal{H}}^2)$) et le fait que $u \in \mathcal{H}_T$, on a :*

$$\begin{aligned} \|\Phi_t\|_{L^2_{\text{pr}}}^2 &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \|\Phi_t(s)\|_{\text{HS}}^2 ds \right] \leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 \mathbb{E} \left[\|\sigma(u(s))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \right] ds \\ &\leq 2C_2^2(1 + \|u\|_{\mathcal{H}_T}^2) \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 ds. \end{aligned}$$

Or, en dimension $d = 1$, l'intégrale temporelle de la norme de Hilbert-Schmidt converge :

$$\int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-2\lambda_n(t-s)} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{2\lambda_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n} < \infty.$$

On en déduit que $\|\Phi_t\|_{L^2_{\text{pr}}}^2 < \infty$, ce qui prouve que $\Phi_t \in L^2_{\text{pr}}([0, T] \times \Omega; \mathcal{L}_2(\mathcal{H}))$.

3. **Calcul pratique par décomposition spectrale** : En décomposant le bruit cylindrique selon les modes propres $(e_n)_{n \geq 1}$ du Laplacien (Théorème 3.1), cette intégrale coïncide avec la série orthogonale convergente dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$:

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sigma(u(s)) dW(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\sigma(u(s))e_n) d\beta_n(s),$$

où $(\beta_n)_{n \geq 1}$ est la suite des mouvements browniens réels standards indépendants associés.

L'intégrale stochastique étant bien définie dans $\mathcal{H}$, la résolution de l'équation se ramène à un problème de point fixe pour l'opérateur de Picard sur $\mathcal{H}_T$.

Théorème 4.7 (Existence et unicité de la solution *mild* stochastique). *Supposons que le domaine $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle borné ($d = 1$). Sous les hypothèses de Lipschitz **(H1)** et de croissance linéaire **(H2)** sur $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, et pour toute condition initiale $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0; \mathcal{H})$, le problème d'évolution stochastique (2) admet une unique solution *mild* globale $u \in \mathcal{H}_T$ sur tout intervalle $[0, T]$.*

Démonstration. On définit l'application de Picard Φ pour tout $u \in \mathcal{H}_T$ et tout $t \in [0, T]$ par :

$$\Phi(u)(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sigma(u(s)) dW(s).$$

Étape 1 : Bonne définition de Φ sur $\mathcal{H}_T$.

Soit $u \in \mathcal{H}_T$. Vérifions que $\Phi(u) \in \mathcal{H}_T$:

— **Finitude de la norme** : Pour tout $t \in [0, T]$, l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, la contraction du semi-groupe ($\|e^{t\Delta}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$), l'isométrie d'Itô (Proposition 3.2) et la condition de croissance **(H2)** fournissent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\Phi(u)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2\mathbb{E} \|e^{t\Delta} u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\mathbb{E} \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sigma(u(s)) dW(s) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq 2\mathbb{E} \|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \int_0^t \mathbb{E} \left\| e^{(t-s)\Delta} \sigma(u(s)) \right\|_{\text{HS}}^2 ds \\ &\leq 2\mathbb{E} \|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 \mathbb{E} \|\sigma(u(s))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 ds \\ &\leq 2\mathbb{E} \|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 4C_2^2 \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 (1 + \mathbb{E} \|u(s)\|_{\mathcal{H}}^2) ds \\ &\leq 2\mathbb{E} \|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 4C_2^2 (1 + \|u\|_{\mathcal{H}_T}^2) \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 ds \\ &\leq 2\mathbb{E} \|u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 4C_2^2 M_T (1 + \|u\|_{\mathcal{H}_T}^2) < \infty. \end{aligned}$$

En passant au supremum sur $t \in [0, T]$, la quantité $\|\Phi(u)\|_{\mathcal{H}_T}$ est bien finie.

— **Continuité en moyenne quadratique** : Soient $t \in [0, T]$ et $h > 0$ tel que $t+h \in [0, T]$. Par l'inégalité triangulaire dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$:

$$(\mathbb{E} \|\Phi(u)(t+h) - \Phi(u)(t)\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2} \leq (\mathbb{E} \|(e^{h\Delta} - \text{Id})e^{t\Delta} u_0\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2} + I_1(h) + I_2(h),$$

avec :

$$\begin{aligned} I_1(h)^2 &= \mathbb{E} \left\| \int_t^{t+h} e^{(t+h-s)\Delta} \sigma(u(s)) dW(s) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_t^{t+h} \mathbb{E} \|e^{(t+h-s)\Delta} \sigma(u(s))\|_{\text{HS}}^2 ds \\ &\leq Ch^{1/2} (1 + \|u\|_{\mathcal{H}_T}^2) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0, \end{aligned}$$

et par l'isométrie d'Itô :

$$I_2(h)^2 = \int_0^t \mathbb{E} \left\| (e^{h\Delta} - \text{Id})e^{(t-s)\Delta} \sigma(u(s)) \right\|_{\text{HS}}^2 ds \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0,$$

en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue et de la continuité forte du semi-groupe sur chaque composante de Hilbert-Schmidt (en effet, pour tout opérateur $K \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|(e^{h\Delta} - \text{Id})Ke_n\|_{\mathcal{H}}^2$

converge vers 0 par convergence dominée discrète sur ℓ^2). Un raisonnement symétrique pour $h \rightarrow 0^-$ assure la continuité à gauche. Le processus étant adapté et continu en moyenne quadratique, il admet une modification prévisible. La trajectoire $t \mapsto \Phi(u)(t)$ est donc bien un élément de $\mathcal{H}_T$.

Étape 2 : Estimation des itérées de Picard.

Soient $u, v \in \mathcal{H}_T$. Le terme initial déterministe s'annule par soustraction. Pour tout $t \in [0, T]$, l'isométrie d'Itô, la contraction du semi-groupe et la condition de Lipschitz **(H1)** donnent :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^t \mathbb{E} \left\| e^{(t-s)\Delta} (\sigma(u(s)) - \sigma(v(s))) \right\|_{\text{HS}}^2 ds \\ &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 \mathbb{E} \|\sigma(u(s)) - \sigma(v(s))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 ds \\ &\leq C_1^2 \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 \mathbb{E} \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds. \end{aligned}$$

En dimension $d = 1$, les valeurs propres vérifient $\lambda_n \geq c_0 n^2$. Par comparaison série-intégrale, la norme de Hilbert-Schmidt du semi-groupe satisfait pour tout $\tau > 0$:

$$\|e^{\tau\Delta}\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n\tau} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2c_0 n^2\tau} \leq \int_0^{\infty} e^{-2c_0 x^2\tau} dx = \frac{C_*}{\tau^{1/2}}, \quad \text{avec } C_* = \sqrt{\frac{\pi}{8c_0}}.$$

En posant $L = C_1^2 C_*$, on a donc :

$$\mathbb{E} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L \int_0^t (t-s)^{-1/2} \mathbb{E} \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds.$$

Montrons par récurrence sur l'entier $m \geq 1$ que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E} \|\Phi^m(u)(t) - \Phi^m(v)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{(L \Gamma(1/2) t^{1/2})^m}{\Gamma(m/2 + 1)} \|u - v\|_{\mathcal{H}_T}^2.$$

— Pour $m = 1$, comme $\mathbb{E} \|u(s) - v(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|u - v\|_{\mathcal{H}_T}^2$, on a :

$$\mathbb{E} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L \|u - v\|_{\mathcal{H}_T}^2 \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds = 2L t^{1/2} \|u - v\|_{\mathcal{H}_T}^2 = \frac{L \Gamma(1/2) t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} \|u - v\|_{\mathcal{H}_T}^2,$$

car $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. L'inégalité est donc vérifiée pour $m = 1$.

— Supposons l'estimation vraie au rang $m \geq 1$. En appliquant l'estimation à $\Phi^m(u)$ et $\Phi^m(v)$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\Phi^{m+1}(u)(t) - \Phi^{m+1}(v)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq L \int_0^t (t-s)^{-1/2} \mathbb{E} \|\Phi^m(u)(s) - \Phi^m(v)(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &\leq L \frac{(L \Gamma(1/2))^m}{\Gamma(m/2 + 1)} \|u - v\|_{\mathcal{H}_T}^2 \int_0^t (t-s)^{-1/2} s^{m/2} ds. \end{aligned}$$

Le changement de variable $s = tw$ fait apparaître la fonction Bêta d'Euler :

$$\int_0^t (t-s)^{-1/2} s^{m/2} ds = t^{(m+1)/2} \int_0^1 (1-w)^{-1/2} w^{m/2} dw = t^{(m+1)/2} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(m/2 + 1)}{\Gamma((m+1)/2 + 1)}.$$

En simplifiant par $\Gamma(m/2 + 1)$, on obtient :

$$\mathbb{E} \|\Phi^{m+1}(u)(t) - \Phi^{m+1}(v)(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{(L \Gamma(1/2) t^{1/2})^{m+1}}{\Gamma((m+1)/2 + 1)} \|u - v\|_{\mathcal{H}_T}^2,$$

ce qui achève la récurrence.

Étape 3 : Point fixe et conclusion.

En prenant la borne supérieure sur $t \in [0, T]$ dans l'inégalité établie à l'étape 2, on obtient pour tout $m \geq 1$:

$$\|\Phi^m(u) - \Phi^m(v)\|_{\mathcal{H}_T}^2 \leq \frac{(L \Gamma(1/2) T^{1/2})^m}{\Gamma(m/2 + 1)} \|u - v\|_{\mathcal{H}_T}^2.$$

Par croissance superexponentielle de la fonction Gamma ($\Gamma(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$), le terme général tend vers 0 lorsque $m \rightarrow \infty$. Il existe donc un entier $m_0 \geq 1$ tel que :

$$\gamma := \frac{(L\Gamma(1/2)T^{1/2})^{m_0}}{\Gamma(m_0/2 + 1)} < 1.$$

L'itérée Φ^{m_0} est donc une contraction stricte sur l'espace de Banach complet $\mathcal{H}_T$. D'après le théorème du point fixe de Banach classique, Φ^{m_0} admet un unique point fixe $u \in \mathcal{H}_T$.

Comme $\Phi(u) = \Phi(\Phi^{m_0}(u)) = \Phi^{m_0}(\Phi(u))$, le vecteur $\Phi(u)$ est également un point fixe de Φ^{m_0} , ce qui impose $\Phi(u) = u$ par unicité. De plus, tout point fixe de Φ étant trivialement un point fixe de Φ^{m_0} , ce point fixe u est unique pour Φ . Ce processus u est donc l'unique solution *mild* globale sur $[0, T]$. $\square$

Décomposition spectrale en bruit additif

Bien que le Théorème 4.7 assure l'existence et l'unicité, la solution reste implicite. Dans le cas d'un bruit additif ($\sigma \equiv \text{Id}_{\mathcal{H}}$), la projection sur la base propre hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ du Laplacien (associée aux valeurs propres $-\lambda_n$, voir Evans [5, Section 6.5]) découple l'EDPS en une infinité d'EDS scalaires indépendantes, ce qui permet d'obtenir une formule explicite.

Corollaire 4.1 (Décomposition spectrale explicite en bruit additif). *Considérons le cas linéaire où l'opérateur de diffusion est constant, $\sigma \equiv \text{Id}_{\mathcal{H}}$.*

Alors, chaque coefficient de Fourier $u_n(t) := \langle u(t), e_n \rangle_{\mathcal{H}}$ de la solution mild est l'unique solution d'une équation différentielle stochastique scalaire d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$:

$$u_n(t) = e^{-\lambda_n t} \langle u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} d\beta_n(s),$$

où $(\beta_n)_{n \geq 1}$ est la famille de mouvements browniens réels standards indépendants associés à W . Par conséquent, la solution admet la représentation spectrale dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n t} \langle u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} d\beta_n(s) \right) e_n.$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$. Projetons la formule de Duhamel abstraite $u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} dW(s)$ sur le vecteur propre e_n .

Par continuité du produit scalaire, on a :

$$\langle u(t), e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle e^{t\Delta} u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle \int_0^t e^{(t-s)\Delta} dW(s), e_n \right\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Comme Δ est autoadjoint de fonctions propres (e_n) associées aux valeurs propres $-\lambda_n$, on a $e^{t\Delta} e_n = e^{-\lambda_n t} e_n$. Le premier terme donne donc directement $\langle u_0, e^{t\Delta} e_n \rangle_{\mathcal{H}} = e^{-\lambda_n t} \langle u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}}$.

Pour le terme stochastique, en appliquant la commutation de l'intégrale stochastique avec la forme linéaire continue $x \mapsto \langle x, e_n \rangle_{\mathcal{H}}$ (Proposition 3.5) :

$$\left\langle \int_0^t e^{(t-s)\Delta} dW(s), e_n \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \langle e^{(t-s)\Delta} e_k, e_n \rangle_{\mathcal{H}} d\beta_k(s).$$

Puisque $\langle e^{(t-s)\Delta} e_k, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = e^{-\lambda_k(t-s)} \delta_{k,n}$, tous les termes $k \neq n$ s'annulent. Il reste uniquement l'intégrale réelle unidimensionnelle :

$$\left\langle \int_0^t e^{(t-s)\Delta} dW(s), e_n \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} d\beta_n(s).$$

L'expression de chaque mode $u_n(t) = \langle u(t), e_n \rangle_{\mathcal{H}}$ est ainsi établie. La formule pour $u(t)$ résulte de la décomposition $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n$, convergente dans $L^2(\Omega; \mathcal{H})$ car $u \in \mathcal{H}_T$. $\square$

Chaque mode de Fourier $u_n(t)$ suit ainsi un processus d'Ornstein-Uhlenbeck indépendant. En dimension 1 avec conditions de Dirichlet, la base propre s'explique simplement :

Remarque 21. La forme analytique de la base hilbertienne orthonormée $(e_n)_{n \geq 1}$ de $L^2(\mathcal{O})$ dépend directement de la géométrie du domaine ouvert borné $\mathcal{O}$.

Par exemple, si l'on se restreint à un intervalle unidimensionnel $\mathcal{O} = (a, b)$ de longueur $L = b - a$, l'opérateur Laplacien Δ soumis aux conditions de Dirichlet homogènes aux bords admet pour base propre orthonormale explicite :

$$e_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi(x-a)}{L}\right), \quad \forall j \in \mathbb{N}^*,$$

associée aux valeurs propres $-\lambda_j$ de Δ (avec $\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 > 0$).

Régularité temporelle des trajectoires

Contrairement au cas déterministe où le semi-groupe régularise instantanément la solution, le bruit blanc injecte des fluctuations à toutes les échelles. Pour obtenir la régularité höldérienne en temps par le critère de Kolmogorov-Čentsov, nous estimons l'accroissement quadratique $\mathbb{E}[\|u(t) - u(s)\|_{\mathcal{H}}^2]$.

Théorème 4.8 (Régularité temporelle en dimension 1 sous bruit additif). *Supposons que le domaine $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle borné ($d = 1$). Pour une condition initiale déterministe $u_0 \in D(\Delta)$ et dans le cas d'un bruit additif ($\sigma \equiv \text{Id}_{\mathcal{H}}$), la solution mild vérifie l'estimation des accroissements en moyenne quadratique :*

$$\sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{\mathbb{E}[\|u(t) - u(s)\|_{\mathcal{H}}^2]}{|t - s|^{1/2}} < \infty.$$

Par conséquent, d'après le critère de continuité de Kolmogorov-Čentsov, le processus u admet une modification dont les trajectoires $t \mapsto u(t)$ sont presque sûrement β -höldériennes à valeurs dans $\mathcal{H}$ pour tout $\beta < 1/4$.

Démonstration. Soient $0 \leq s < t \leq T$. Posons $h = t - s$. Par linéarité de la formule de Duhamel stochastique avec bruit additif $\sigma \equiv \text{Id}_{\mathcal{H}}$, l'accroissement $u(t) - u(s)$ se décompose sous la forme :

$$\begin{aligned} u(t) - u(s) &= (e^{t\Delta} - e^{s\Delta})u_0 + \int_0^s (e^{(t-r)\Delta} - e^{(s-r)\Delta}) dW(r) + \int_s^t e^{(t-r)\Delta} dW(r) \\ &=: I_{\text{init}} + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

L'inégalité élémentaire $\|a + b + c\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 3(\|a\|_{\mathcal{H}}^2 + \|b\|_{\mathcal{H}}^2 + \|c\|_{\mathcal{H}}^2)$ donne :

$$\mathbb{E}\|u(t) - u(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 3(\|I_{\text{init}}\|_{\mathcal{H}}^2 + \mathbb{E}\|I_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \mathbb{E}\|I_2\|_{\mathcal{H}}^2).$$

1. Terme stochastique principal I_2 :

Par l'isométrie d'Itô en dimension infinie (Proposition 3.2), on a :

$$\mathbb{E}\|I_2\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}\left\|\int_s^t e^{(t-r)\Delta} dW(r)\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_s^t \|e^{(t-r)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 dr.$$

Calculons la norme de Hilbert-Schmidt du semi-groupe sur la base orthonormée $(e_n)_{n \geq 1}$ des fonctions propres du Laplacien Dirichlet associées aux valeurs propres $\lambda_n = (n\pi/L)^2 \geq c n^2$ ($c > 0$) :

$$\int_s^t \|e^{(t-r)\Delta}\|_{\text{HS}}^2 dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t e^{-2\lambda_n(t-r)} dr = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\lambda_n h}}{2\lambda_n}.$$

Pour majorer cette somme spectrale, supposons d'abord $0 < h \leq 1$. Le seuil $N = \lfloor h^{-1/2} \rfloor$ est alors un entier supérieur ou égal à 1, et vérifie $N \geq \frac{1}{2} h^{-1/2}$ (car $\lfloor x \rfloor \geq x/2$ pour tout $x \geq 1$). Scindons la série en deux échelles :

— Pour les basses fréquences $1 \leq n \leq N$, l'inégalité $1 - e^{-x} \leq x$ pour $x \geq 0$ entraîne $\frac{1 - e^{-2\lambda_n h}}{2\lambda_n} \leq h$, d'où :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1 - e^{-2\lambda_n h}}{2\lambda_n} \leq Nh \leq h^{-1/2} h = h^{1/2}.$$

- Pour les hautes fréquences $n > N$, en majorant $1 - e^{-2\lambda_n h} \leq 1$ et par comparaison série-intégrale pour $\lambda_n \geq cn^2$:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\lambda_n h}}{2\lambda_n} \leq \frac{1}{2c} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2c} \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2cN} \leq \frac{1}{2c \cdot \frac{1}{2} h^{-1/2}} = \frac{1}{c} h^{1/2} =: C' h^{1/2},$$

avec $C' = \frac{1}{c} < \infty$.

Pour $0 < h \leq 1$, on a donc $\mathbb{E}\|I_2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq (1 + C')h^{1/2}$. Si $T > 1$ et $h > 1$, la majoration triviale $1 - e^{-2\lambda_n h} \leq 1$ donne $\mathbb{E}\|I_2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n} = M_T \leq M_T h^{1/2}$ (puisque $1 < h^{1/2}$). Dans tous les cas, il vient :

$$\mathbb{E}\|I_2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_2 |t - s|^{1/2}, \quad \text{avec } K_2 = \max(1 + C', M_T).$$

2. Terme stochastique I_1 :

Par l'isométrie d'Itô et décomposition sur la base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|I_1\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^s \left\| (e^{h\Delta} - \text{Id})e^{(s-r)\Delta} \right\|_{\text{HS}}^2 dr \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_n h})^2 \int_0^s e^{-2\lambda_n(s-r)} dr \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\lambda_n s}}{2\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n h})^2. \end{aligned}$$

Puisque $1 - e^{-2\lambda_n s} \leq 1$ et $(1 - e^{-\lambda_n h})^2 \leq 1 - e^{-2\lambda_n h}$, on majore directement :

$$\mathbb{E}\|I_1\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\lambda_n h}}{2\lambda_n} \leq K_2 |t - s|^{1/2}.$$

3. Terme initial I_{init} :

Puisque $u_0 \in D(\Delta)$, la formule fondamentale $e^{t\Delta}u_0 - e^{s\Delta}u_0 = \int_s^t e^{\tau\Delta}\Delta u_0 d\tau$ et la contraction du semi-groupe ($\|e^{\tau\Delta}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$) donnent :

$$\|I_{\text{init}}\|_{\mathcal{H}} \leq \int_s^t \|e^{\tau\Delta}\Delta u_0\|_{\mathcal{H}} d\tau \leq |t - s| \|\Delta u_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Comme $|t - s| \leq T^{1/2}|t - s|^{1/2}$, on obtient :

$$\|I_{\text{init}}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq |t - s|^2 \|\Delta u_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq T^{3/2} \|\Delta u_0\|_{\mathcal{H}}^2 |t - s|^{1/2}.$$

En sommant ces trois contributions, il existe une constante finie $K > 0$ telle que pour tous $s, t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E}\|u(t) - u(s)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K |t - s|^{1/2}.$$

Conclusion et critère de continuité de Kolmogorov-Čentsov :

L'intégrande $e^{(t-r)\Delta}$ étant déterministe, la variable $X := I_1 + I_2 = u(t) - u(s) - I_{\text{init}}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée dans $\mathcal{H}$ (voir Remarque 16). D'après la Proposition 2.9 sur l'équivalence des moments gaussiens, pour tout $p \geq 1$, il existe $C_p > 0$ tel que $(\mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{H}}^p)^{1/p} \leq C_p (\mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2} \leq C_p (2K_2)^{1/2} |t - s|^{1/4}$.

Par l'inégalité de Minkowski dans $L^p(\Omega; \mathcal{H})$ et la majoration $\|I_{\text{init}}\|_{\mathcal{H}} \leq T^{3/4} \|\Delta u_0\|_{\mathcal{H}} |t - s|^{1/4}$, on obtient :

$$(\mathbb{E}\|u(t) - u(s)\|_{\mathcal{H}}^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{H}}^p)^{1/p} + \|I_{\text{init}}\|_{\mathcal{H}} \leq \left(C_p (2K_2)^{1/2} + T^{3/4} \|\Delta u_0\|_{\mathcal{H}} \right) |t - s|^{1/4} =: C'_p |t - s|^{1/4},$$

ce qui donne $\mathbb{E}[\|u(t) - u(s)\|_{\mathcal{H}}^p] \leq (C'_p)^p |t - s|^{p/4}$. Soit $\beta < 1/4$ fixé. Choisissons un ordre d'intégration $p > \frac{1}{1/4 - \beta} > 4$. L'exposant temporel vérifie alors :

$$\frac{p}{4} = 1 + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{p}{4} - 1 > 0,$$

de sorte que le rapport d'exposants satisfait :

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{1}{4} - \frac{1}{p} > \beta.$$

D'après le critère de continuité de Kolmogorov-Čentsov, le processus $(u(t))_{t \in [0, T]}$ admet une modification presque sûrement β -höldérienne à valeurs dans $\mathcal{H}$. Cette régularité étant vraie pour tout $\beta < 1/4$, le théorème est démontré. $\square$

La preuve précédente exploite le comportement asymptotique $\lambda_n \sim cn^2$, spécifique à la dimension $d = 1$. Dès que $d \geq 2$, la situation change radicalement :

Remarque 22 (Obstruction en dimension supérieure et criticité de $d = 1$). *L'hypothèse $d = 1$ est indispensable pour obtenir une solution à valeurs dans $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$. En effet, d'après la loi de Weyl [15], les valeurs propres du Laplacien vérifient l'asymptotique $\lambda_n \sim cn^{2/d}$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Par conséquent, la série de variances $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$ converge si et seulement si $d = 1$. Dès que $d \geq 2$, cette série diverge, ce qui implique que l'intégrale stochastique $\int_0^t e^{(t-s)\Delta} dW(s)$ n'appartient presque sûrement plus à $L^2(\mathcal{O})$. Pour traiter les dimensions supérieures, il devient impératif d'affaiblir l'espace d'états en travaillant dans des espaces de Sobolev à indice négatif ou des espaces de Besov (voir Hairer [7, 8] et Da Prato-Zabczyk [3]).

La solution exacte étant donnée par une série infinie d'intégrales stochastiques, sa simulation pratique nécessite une discrétisation spatio-temporelle : une troncature spectrale de Galerkin en espace et un schéma d'Euler-Maruyama en temps, étudiés dans la section suivante.

5 Analyse numérique, schémas de discrétisation et simulations

Cette section est consacrée à l'analyse numérique et à la simulation de l'équation de la chaleur stochastique, en suivant le cadre développé par Jentzen et Kloeden [10] ainsi que Kruse [12].

Pour ramener l'EDPS à un cadre simulable, nous introduisons d'abord une approximation spectrale de Galerkin du bruit cylindrique et établissons sa convergence dans l'échelle fractionnaire $\mathcal{H}^{-\delta}$. Nous formulons ensuite la discrétisation spatio-temporelle complète, couplant projection spectrale spatiale et schéma d'Euler-Maruyama en temps, et démontrons les ordres de convergence forte et faible sous condition CFL spectrale. Enfin, des simulations numériques illustrent la dynamique spatio-temporelle de la solution et confrontent les trajectoires simulées à la régularité théorique.

5.1 Approximation spectrale de Galerkin et troncature du bruit cylindrique

Pour simuler numériquement une équation différentielle partielle stochastique, il est indispensable de ramener l'espace d'états de dimension infinie à un espace de dimension finie. Dans cette sous-section, nous introduisons l'opérateur de projection de Galerkin afin de définir une approximation spectrale de dimension finie du mouvement brownien cylindrique, puis nous démontrons rigoureusement sa convergence vers le bruit complet dans l'échelle des espaces de Hilbert fractionnaires $\mathcal{H}^{-\delta}$.

Afin de rappeler le cadre, on se place sur le domaine spatial ouvert borné $\mathcal{O} = (a, b) \subset \mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$ l'espace de Hilbert sous-jacent muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, et on note $(e_n)_{n \geq 1}$ la base hilbertienne de $\mathcal{H}$ constituée des fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes associées aux valeurs propres $\lambda_n > 0$, satisfaisant $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ avec $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$ (voir Remarque 21).

Définition 5.1 (Opérateur de projection de Galerkin). *Pour tout entier $N \geq 1$, on définit le sous-espace de dimension finie $\mathcal{H}_N = \text{vect}(e_1, \dots, e_N) \subset \mathcal{H}$. L'opérateur de projection orthogonale $P_N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_N$ est défini pour tout $u \in \mathcal{H}$ par :*

$$P_N u = \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle_{\mathcal{H}} e_n.$$

Proposition 5.1 (Propriétés du projecteur de Galerkin). *L'opérateur de projection de Galerkin P_N possède les propriétés suivantes :*

1. **Caractère contractant** : Pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\|P_N u\|_{\mathcal{H}} \leq \|u\|_{\mathcal{H}}$, ce qui implique $\|P_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ (et $\|P_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 1$ pour tout $N \geq 1$);
2. **Projecteur orthogonal** : L'opérateur P_N est idempotent ($P_N^2 = P_N$) et auto-adjoint ($P_N^* = P_N$);
3. **Convergence forte vers l'identité** : Pour tout $u \in \mathcal{H}$, la suite $(P_N u)_{N \geq 1}$ converge vers u dans $\mathcal{H}$, soit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|P_N u - u\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Démonstration. 1. Caractère contractant :

Soit $u \in \mathcal{H}$. La famille $(e_n)_{n \geq 1}$ étant orthonormée dans $\mathcal{H}$, l'identité de Pythagore donne directement :

$$\|P_N u\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_{\mathcal{H}}^2.$$

En prenant la racine carrée, il vient $\|P_N u\|_{\mathcal{H}} \leq \|u\|_{\mathcal{H}}$, ce qui prouve la contraction et assure $\|P_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$. Puisque $P_N e_1 = e_1$ avec $\|e_1\|_{\mathcal{H}} = 1$, on a exactement $\|P_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 1$.

2. Idempotence et caractère auto-adjoint :

Par orthonormalité de la famille $(e_n)_{n \geq 1}$, on a $\langle e_k, e_n \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{k,n}$, d'où $P_N e_k = e_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$. Par linéarité continue de P_N :

$$P_N^2 u = P_N \left(\sum_{k=1}^N \langle u, e_k \rangle_{\mathcal{H}} e_k \right) = \sum_{k=1}^N \langle u, e_k \rangle_{\mathcal{H}} P_N e_k = \sum_{k=1}^N \langle u, e_k \rangle_{\mathcal{H}} e_k = P_N u.$$

Soient ensuite $u, v \in \mathcal{H}$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire réel dans $\mathcal{H}$:

$$\langle P_N u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_n, v \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle u, \sum_{n=1}^N \langle v, e_n \rangle_{\mathcal{H}} e_n \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, P_N v \rangle_{\mathcal{H}}.$$

L'opérateur P_N coïncide donc avec son adjoint P_N^* , ce qui établit qu'il s'agit d'un projecteur orthogonal.

3. Convergence forte vers l'identité :

Pour tout $u \in \mathcal{H}$, l'écart avec sa projection s'écrit $u - P_N u = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle_{\mathcal{H}} e_n$. L'identité de Parseval dans $\mathcal{H}$ assure :

$$\|u - P_N u\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_{\mathcal{H}}^2$ étant convergente, son reste d'ordre N tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. On en conclut que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|P_N u - u\|_{\mathcal{H}} = 0$, prouvant la convergence forte de P_N vers $\text{Id}_{\mathcal{H}}$. $\square$

Le mouvement brownien cylindrique $W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) e_n$ est formellement défini comme une somme infinie de mouvements browniens réels standards indépendants. D'un point de vue numérique et algorithmique, il est impossible de simuler un tel objet continu car cela nécessiterait de générer une infinité de variables aléatoires indépendantes à chaque pas de temps. De surcroît, comme établi à la Section 3.1, la trajectoire $W(t)$ n'appartient presque sûrement pas à l'espace d'états $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$ car sa variance formelle y est infinie : $\mathbb{E}[\|W(t)\|_{\mathcal{H}}^2] = t \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$.

Afin de construire une approximation calculable sur machine, on tronque spectralement le bruit en projetant ses composantes sur le sous-espace de dimension finie $\mathcal{H}_N$.

Définition 5.2 (Mouvement brownien cylindrique tronqué). *Soit $W(t)$ le mouvement brownien cylindrique défini sur $[0, T]$ (voir Section 3.1). Pour tout $t \in [0, T]$ et tout entier $N \geq 1$, on définit le mouvement brownien cylindrique tronqué à l'ordre N , noté $W_N(t)$, par la projection orthogonale :*

$$W_N(t) = P_N W(t) = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) e_n,$$

où $(\beta_n(t))_{t \in [0, T]}$ pour $n \in \{1, \dots, N\}$ est une famille de mouvements browniens réels standards mutuellement indépendants.

Pour tout $N \geq 1$ fixé, W_N est un processus gaussien à trajectoires presque sûrement continues dans le sous-espace de dimension finie $\mathcal{H}_N \subset \mathcal{H}$. Toutefois, pour quantifier rigoureusement l'erreur commise lors de cette troncature spectrale et justifier la convergence de W_N vers le bruit complet W lorsque $N \rightarrow \infty$, il est nécessaire de munir l'espace d'une topologie affaiblie dans laquelle W admet une existence rigoureuse. C'est l'objet de l'échelle des espaces de Hilbert fractionnaires.

Définition 5.3 (Échelle des espaces de Hilbert fractionnaires $\mathcal{H}^r$). Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ la base hilbertienne de $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$ formée des fonctions propres du Laplacien Dirichlet et $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ la suite des valeurs propres associées ($-\Delta e_n = \lambda_n e_n$).

Pour tout exposant réel $r \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Hilbert fractionnaire $\mathcal{H}^r = \mathcal{D}((-\Delta)^{r/2})$ par :

$$\mathcal{H}^r = \left\{ v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \mid \|v\|_r^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^r v_n^2 < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle_r = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^r u_n v_n$.

Pour $r = 0$, on retrouve l'espace de base $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$. Pour $r > 0$, les espaces $\mathcal{H}^r$ s'identifient à des sous-espaces de Sobolev de régularité accrue inclus dans $\mathcal{H}$ (avec notamment $\mathcal{H}^1 = H_0^1(\mathcal{O})$ et $\mathcal{H}^2 = H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}) = D(\Delta)$).

À l'inverse, pour $r = -\delta < 0$ avec $\delta > 0$, l'espace $\mathcal{H}^{-\delta}$ est le complété de $\mathcal{H}$ pour la norme à poids négatif $\|v\|_{-\delta} = (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\delta} \langle v, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2)^{1/2}$, correspondant au dual topologique de $\mathcal{H}^{\delta}$ par rapport au pivot $\mathcal{H}$. Cette échelle d'espaces fournit le cadre fonctionnel naturel pour établir la convergence du bruit tronqué.

Théorème 5.1 (Convergence du bruit cylindrique tronqué). Soit $T > 0$. Pour tout exposant $\delta > \frac{1}{2}$, la suite de mouvements browniens cylindriques tronqués $(W_N)_{N \geq 1}$ converge vers le mouvement brownien cylindrique W dans l'espace de Hilbert fractionnaire $\mathcal{H}^{-\delta}$ au sens de la moyenne quadratique :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [\|W(t) - W_N(t)\|_{-\delta}^2] = 0.$$

De plus, l'erreur de troncature vérifie la majoration uniforme en temps :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|W(t) - W_N(t)\|_{-\delta}^2 \right] \leq 4T \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\delta}} \leq 4C_{\delta} T N^{-(2\delta-1)},$$

où $C_{\delta} > 0$ est une constante finie indépendante de N et de T .

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Par définition du mouvement brownien cylindrique (Section 3.1) et de sa projection de Galerkin $W_N(t) = P_N W(t)$, l'erreur de troncature s'exprime comme le reste de la décomposition spectrale :

$$W(t) - W_N(t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n(t) e_n.$$

Par définition de la norme de l'espace fractionnaire $\mathcal{H}^{-\delta}$ (Définition 5.3), la norme au carré de ce reste s'écrit :

$$\|W(t) - W_N(t)\|_{-\delta}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-\delta} \left\langle \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k(t) e_k, e_n \right\rangle_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-\delta} \beta_n(t)^2.$$

Puisque tous les termes de la série sont presque sûrement positifs ou nuls ($\lambda_n^{-\delta} \beta_n(t)^2 \geq 0$), le théorème de Fubini-Tonelli autorise l'intervention de l'espérance et de la sommation infinie :

$$\mathbb{E} [\|W(t) - W_N(t)\|_{-\delta}^2] = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-\delta} \mathbb{E} [\beta_n(t)^2].$$

Chaque processus $(\beta_n(t))_{t \in [0, T]}$ étant un mouvement brownien réel standard issu de zéro, on a $\mathbb{E} [\beta_n(t)^2] = t \leq T$. On en déduit l'identité exacte :

$$\mathbb{E} [\|W(t) - W_N(t)\|_{-\delta}^2] = t \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\delta}}.$$

Pour évaluer le comportement de cette série spectrale, rappelons que les valeurs propres du Laplacien de Dirichlet sur $\mathcal{O} = (a, b)$ sont données explicitement par :

$$\lambda_n = c_0 n^2 \quad \text{avec} \quad c_0 = \left(\frac{\pi}{b-a} \right)^2 > 0.$$

Par conséquent, pour tout $\delta > 0$, le terme général vérifie :

$$\frac{1}{\lambda_n^\delta} = \left(\frac{b-a}{\pi} \right)^{2\delta} \frac{1}{n^{2\delta}}.$$

Sous l'hypothèse $\delta > \frac{1}{2}$, l'exposant vérifie strictement $2\delta > 1$. La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\delta}}$ est donc convergente. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\delta}$ converge également dans $\mathbb{R}$.

Le terme $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-\delta}$ représente le reste d'ordre N d'une série numérique convergente ; il tend donc vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. De surcroît, par comparaison série-intégrale pour la fonction décroissante $x \mapsto x^{-2\delta}$ sur $[N, +\infty[$, on obtient la majoration quantitative du reste :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\delta}} \leq \int_N^{\infty} x^{-2\delta} dx = \frac{N^{-(2\delta-1)}}{2\delta-1}.$$

En posant $C_\delta = \left(\frac{b-a}{\pi} \right)^{2\delta} \frac{1}{2\delta-1} < +\infty$, il vient :

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [\|W(t) - W_N(t)\|_{-\delta}^2] \leq T \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^\delta} \leq C_\delta T N^{-(2\delta-1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Enfin, pour établir le contrôle uniforme sur les trajectoires, observons que pour chaque $N \geq 1$, le processus d'erreur $M_N(t) := W(t) - W_N(t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \beta_n(t) e_n$ est une martingale continue de carré intégrable à valeurs dans l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}^{-\delta}$. L'inégalité maximale de Doob dans $\mathcal{H}^{-\delta}$ donne :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|W(t) - W_N(t)\|_{-\delta}^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} [\|W(T) - W_N(T)\|_{-\delta}^2] = 4T \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^\delta} \leq 4C_\delta T N^{-(2\delta-1)},$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 23 (Précision du seuil critique $\delta > 1/2$ et régularité du bruit). *Le seuil $\delta > 1/2$ est optimal en dimension spatiale $d = 1$. En effet, pour $\delta \leq 1/2$, l'exposant de Riemann vérifie $2\delta \leq 1$, de sorte que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\delta}$ diverge vers $+\infty$. En particulier, pour $\delta = 0$, on retrouve l'espace $\mathcal{H}^0 = L^2(\mathcal{O})$ dans lequel la norme au carré du bruit blanc cylindrique a une espérance infinie ($\mathbb{E}[\|W(t)\|_{\mathcal{H}}^2] = +\infty$). Le mouvement brownien tronqué $W_N(t)$ constitue ainsi une régularisation spatiale lisse (élément de $\mathcal{H}_N \subset C^\infty(\bar{\mathcal{O}})$) d'un bruit idéal singulier qui ne vit que dans les distributions aléatoires d'indice négatif $\mathcal{H}^{-\delta}$.*

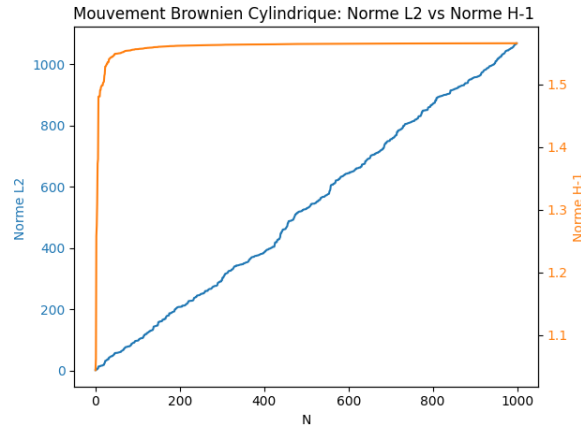


FIGURE 3 – Divergence de la norme L^2 du bruit blanc tronqué ($\|W_N(t)\|_{L^2} \sim \sqrt{N}$) opposée à la convergence de sa norme dans l'espace de Sobolev négatif $\|W_N(t)\|_{H^{-1}}$ ($\delta = 1 > 1/2$).

5.2 Schémas de discrétisation

La simulation numérique d'une EDPS requiert une double discrétisation pour s'affranchir de la dimension infinie de son espace d'états : une projection spatiale sur un sous-espace spectral de Galerkin et une intégration temporelle pas à pas. Nous présentons ici l'analyse d'une approximation spectrale par Galerkin en espace couplée au schéma d'Euler-Maruyama en temps, ainsi que l'étude de leurs vitesses de convergence forte et faible.

On désigne par $\overline{\mathcal{O}} = [a, b]$ l'adhérence de notre domaine ouvert borné $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$.

Définition 5.4 (Discrétisation spatiale du Laplacien par projection de Galerkin). *Soit $P_N: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_N$ l'opérateur de projection de Galerkin sur le sous-espace de dimension finie $\mathcal{H}_N = \text{vect}(e_1, \dots, e_N) \subset \mathcal{H}$ introduit à la Définition 5.1. L'opérateur de Laplace-Dirichlet $(\Delta, D(\Delta))$ est approché sur $\mathcal{H}_N$ par sa restriction projetée $\Delta_N: \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_N$ définie par :*

$$\Delta_N = P_N \Delta P_N.$$

Puisque les fonctions propres satisfont $\Delta e_n = -\lambda_n e_n \in \mathcal{H}_N$ pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, l'opérateur Δ_N est diagonal dans la base hilbertienne $(e_1, \dots, e_N)$ et s'identifie à la matrice $A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ donnée par :

$$A_N = \text{diag}(-\lambda_1, \dots, -\lambda_N) = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_N \end{pmatrix},$$

où $(\lambda_n)_{n=1}^N$ sont les valeurs propres associées aux fonctions propres $(e_n)_{n=1}^N$ du Laplacien soumis aux conditions de Dirichlet homogènes sur $\mathcal{O}$.

On introduit une subdivision uniforme de l'intervalle de temps $[0, T]$ de pas $\Delta t = T/K$, définissant les instants discrets $t_k = k\Delta t$ pour $k \in \{0, \dots, K\}$.

Définition 5.5 (Schéma d'Euler-Maruyama spectral). *On munit $\mathcal{H}_N = \text{vect}(e_1, \dots, e_N)$ de l'isométrie avec $\mathbb{R}^N$ qui associe à tout vecteur $U = [u_1, \dots, u_N]^T \in \mathbb{R}^N$ l'élément $u_N = \sum_{n=1}^N u_n e_n \in \mathcal{H}_N$, vérifiant $\|U\|_{\mathbb{R}^N} = \|u_N\|_{\mathcal{H}}$. On identifiera souvent U^k à son représentant dans $\mathcal{H}_N$.*

Pour l'opérateur de diffusion $\sigma: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on désigne par $\Sigma(U^k) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ la matrice de coefficients :

$$\Sigma(U^k)_{i,j} = \langle \sigma(U^k) e_j, e_i \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Le schéma d'Euler-Maruyama spectral est alors défini par la relation de récurrence dans $\mathbb{R}^N$:

$$U^{k+1} = U^k + \Delta t A_N U^k + \Sigma(U^k) \Delta W_N^k, \quad \forall k \in \{0, \dots, K-1\},$$

où :

- la condition initiale discrète est $U^0 = [u_1^0, \dots, u_N^0]^T \in \mathbb{R}^N$ avec $u_n^0 = \langle u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}}$ pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, de sorte que l'élément associé dans $\mathcal{H}_N$ est $P_N u_0$;
- $\Delta W_N^k = [\Delta \beta_1^k, \dots, \Delta \beta_N^k]^T \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur des incréments stochastiques, dont les composantes sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ définies par $\Delta \beta_n^k = \beta_n(t_{k+1}) - \beta_n(t_k)$, représentant l'accroissement du bruit brownien cylindrique tronqué $W_N(t_{k+1}) - W_N(t_k)$ (Définition 5.2).

L'action matricielle $\Sigma(U^k) \Delta W_N^k$ coïncide ainsi avec les composantes dans la base $(e_n)_{1 \leq n \leq N}$ de la projection orthogonale $P_N(\sigma(U^k) \Delta W_N^k)$.

Avant d'énoncer les théorèmes de convergence, il est indispensable d'établir la condition de stabilité requise par notre schéma numérique explicite.

Proposition 5.2 (Stabilité et condition CFL spectrale (cas additif)). *Considérons le schéma d'Euler-Maruyama spectral explicite (Définition 5.5) appliqué au cas d'un bruit additif ($\sigma(u) \equiv \sigma > 0$).*

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Sous la condition CFL spectrale sous-critique :

$$\Delta t \leq \frac{2(1 - \varepsilon)}{\lambda_N},$$

le schéma est numériquement stable au sens où l'énergie moyenne discrète reste bornée uniformément par rapport au temps $k \geq 0$, au pas de temps Δt et au nombre de modes N :

$$\sup_{k \geq 0} \mathbb{E} [\|U^k\|_{\mathcal{H}}^2] \leq \|U^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty.$$

De plus, lorsque $k \rightarrow \infty$, l'énergie converge vers la variance stationnaire finie :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\|U^k\|_{\mathcal{H}}^2] = \sum_{n=1}^N \frac{\sigma^2}{\lambda_n(2 - \lambda_n \Delta t)}.$$

Démonstration. Dans le cadre d'un bruit additif ($\sigma(u) \equiv \sigma$), le schéma explicite s'écrit vectoriellement dans $\mathcal{H}_N$:

$$U^{k+1} = (I + \Delta t A_N) U^k + \sigma \Delta W_N^k.$$

La matrice $A_N = \text{diag}(-\lambda_1, \dots, -\lambda_N)$ étant diagonale dans la base propre $(e_n)_{1 \leq n \leq N}$, le schéma se découple mode par mode :

$$u_n^{k+1} = (1 - \lambda_n \Delta t) u_n^k + \sigma \Delta \beta_n^k, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}.$$

Posons $\mu_n = 1 - \lambda_n \Delta t$. L'accroissement brownien $\Delta \beta_n^k \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ étant centré et indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{t_k}$, le passage à l'espérance du carré annule le terme croisé :

$$\mathbb{E} [(u_n^{k+1})^2] = \mu_n^2 \mathbb{E} [(u_n^k)^2] + \sigma^2 \Delta t.$$

En notant $E_n^k = \mathbb{E} [(u_n^k)^2]$, la sommation de cette suite arithmético-géométrique fournit pour tout $k \geq 0$:

$$E_n^k = \mu_n^{2k} E_n^0 + \sigma^2 \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \mu_n^{2j} = \mu_n^{2k} E_n^0 + \sigma^2 \Delta t \frac{1 - \mu_n^{2k}}{1 - \mu_n^2}.$$

Développons le dénominateur :

$$1 - \mu_n^2 = 1 - (1 - \lambda_n \Delta t)^2 = \lambda_n \Delta t (2 - \lambda_n \Delta t).$$

Sous l'hypothèse $\Delta t \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{\lambda_N}$, comme $\lambda_n \leq \lambda_N$, on a pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$:

$$2 - \lambda_n \Delta t \geq 2 - \lambda_N \Delta t \geq 2 - 2(1 - \varepsilon) = 2\varepsilon > 0.$$

Il s'ensuit que $|\mu_n| < 1$, d'où $\mu_n^{2k} \leq 1$ et $1 - \mu_n^{2k} \leq 1$. On en déduit la majoration uniforme par rapport à k :

$$E_n^k \leq E_n^0 + \frac{\sigma^2 \Delta t}{\lambda_n \Delta t (2 - \lambda_n \Delta t)} \leq E_n^0 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon \lambda_n}.$$

Par l'identité de Parseval dans $\mathcal{H}_N$, l'énergie totale discrète vérifie :

$$\mathbb{E} [\|U^k\|_{\mathcal{H}}^2] = \sum_{n=1}^N E_n^k \leq \sum_{n=1}^N E_n^0 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \leq \|U^0\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}.$$

En dimension $d = 1$, les valeurs propres croissent en $\lambda_n = c_0 n^2$, ce qui assure la convergence de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < +\infty$. La borne est donc finie et strictement indépendante de N , de Δt et de k , ce qui démontre la stabilité L^2 .

Enfin, comme $|\mu_n| < 1$, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_n^{2k} = 0$, ce qui fournit la convergence vers la variance stationnaire annoncée. $\square$

À présent, le but est d'analyser l'erreur commise par le schéma numérique global. Cette erreur fait intervenir les paramètres de discrétisation : le nombre de modes spatiaux N et le pas de temps Δt .

Théorème 5.2 (Vitesse de convergence forte). *Soit $T > 0$. On suppose que :*

1. l'opérateur de diffusion $\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ satisfait la condition de Lipschitz usuelle ;
2. la condition initiale vérifie $u_0 \in D(\Delta)$ presque sûrement avec $\mathbb{E} [\|u_0\|_{D(\Delta)}^2] < +\infty$;

3. le pas de temps respecte la condition CFL sous-critique : $\Delta t \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{\lambda_N}$ avec $\varepsilon \in]0, 1[$.

Alors, il existe une constante $C > 0$, indépendante de N et de Δt , telle que :

$$\sup_{k \in \{0, \dots, K\}} (\mathbb{E} [\|u(t_k) - U^k\|_{\mathcal{H}}^2])^{1/2} \leq C (N^{-1/2} + (\Delta t)^{1/4}).$$

Démonstration. La preuve s'articule en six étapes : la décomposition de l'erreur globale, l'estimation de la partie déterministe, la scission de l'erreur stochastique, puis le contrôle analytique successif des quatre termes J_4 , J_3 , J_2 et J_1 , avant la conclusion par le lemme de Gronwall discret.

Étape 1 : Formulation intégrale et décomposition de l'erreur.

Rappelons que la matrice d'itération déterministe associée au schéma d'Euler explicite sur $\mathcal{H}_N$ est $S_{\Delta t} = I + \Delta t A_N$. Sous la condition CFL spectrale $\Delta t \leq 2(1-\varepsilon)/\lambda_N$, ses valeurs propres $\mu_n = 1 - \lambda_n \Delta t$ vérifient $|\mu_n| \leq 1$ pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, ce qui garantit la contraction uniforme :

$$\|S_{\Delta t}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)} = \max_{1 \leq n \leq N} |1 - \lambda_n \Delta t| \leq 1.$$

En résolvant par récurrence la relation $U^{j+1} = S_{\Delta t} U^j + P_N \sigma(U^j) \Delta W_N^j$, la solution discrète au temps $t_k = k \Delta t$ satisfait la formule *mild* discrète :

$$U^k = S_{\Delta t}^k P_N u_0 + \sum_{j=0}^{k-1} S_{\Delta t}^{k-1-j} P_N \sigma(U^j) \Delta W_N^j.$$

Par ailleurs, la solution continue vérifie la formule de Duhamel (Définition 4.8) :

$$u(t_k) = e^{t_k \Delta} u_0 + \int_0^{t_k} e^{(t_k-s)\Delta} \sigma(u(s)) dW(s).$$

Notons $e^k = u(t_k) - U^k$ l'erreur globale au temps t_k . En soustrayant ces deux identités et en appliquant l'inégalité de convexité $\|a + b\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\|a\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\|b\|_{\mathcal{H}}^2$, il vient :

$$\mathbb{E} [\|e^k\|_{\mathcal{H}}^2] \leq 2 \mathbb{E} [\|e_{\text{det}}^k\|_{\mathcal{H}}^2] + 2 \mathbb{E} [\|I_{\text{stoch}}^k\|_{\mathcal{H}}^2],$$

avec $e_{\text{det}}^k = e^{t_k \Delta} u_0 - S_{\Delta t}^k P_N u_0$ et le terme stochastique résiduel I_{stoch}^k .

Étape 2 : Contrôle de l'erreur déterministe e_{det}^k .

Décomposons l'erreur déterministe selon la projection spatiale et l'intégration temporelle :

$$e_{\text{det}}^k = (\text{Id} - P_N) e^{t_k \Delta} u_0 + (e^{t_k \Delta} - S_{\Delta t}^k) P_N u_0.$$

Par orthogonalité de la projection P_N , ces deux composantes sont orthogonales dans $\mathcal{H}$, d'où :

$$\|e_{\text{det}}^k\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(\text{Id} - P_N) e^{t_k \Delta} u_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(e^{t_k \Delta} - S_{\Delta t}^k) P_N u_0\|_{\mathcal{H}}^2.$$

— **Erreur de projection spatiale :** Puisque $u_0 \in D(\Delta)$ presque sûrement et que $e^{-2\lambda_n t_k} \leq 1$, l'identité de Parseval sur la base propre donne :

$$\|(\text{Id} - P_N) e^{t_k \Delta} u_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t_k} \langle u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^2 \langle u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}^2} \|u_0\|_{D(\Delta)}^2.$$

En dimension $d = 1$, $\lambda_N = c_0 N^2$, donc $\lambda_{N+1}^{-2} \leq C N^{-4}$.

— **Erreur de discrétisation temporelle :** Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, posons $a = e^{-\lambda_n \Delta t}$ et $b = 1 - \lambda_n \Delta t$. L'erreur locale vérifie $|a - b| \leq \frac{1}{2} (\lambda_n \Delta t)^2$. De plus, sous la condition CFL spectrale $\Delta t \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{\lambda_N}$, on a $1 - |b| \geq \frac{1-b^2}{2} = \frac{\lambda_n \Delta t (2 - \lambda_n \Delta t)}{2} \geq \varepsilon \lambda_n \Delta t$. Par télescopage amorti :

$$|e^{-\lambda_n t_k} - (1 - \lambda_n \Delta t)^k| = |a^k - b^k| \leq |a - b| \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} |b|^j \leq \frac{(\lambda_n \Delta t)^2}{2} \frac{1}{1 - |b|} \leq \frac{\Delta t \lambda_n}{2\varepsilon}.$$

En élevant au carré, le terme en λ_n^2 se recombine exactement avec les coefficients de Fourier :

$$\|(e^{t_k \Delta} - S_{\Delta t}^k) P_N u_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^N (e^{-\lambda_n t_k} - (1 - \lambda_n \Delta t)^k)^2 \langle u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{(\Delta t)^2}{4\varepsilon^2} \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \langle u_0, e_n \rangle_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{(\Delta t)^2}{4\varepsilon^2} \|u_0\|_{D(\Delta)}^2.$$

En prenant l'espérance, comme $\mathbb{E}[\|u_0\|_{D(\Delta)}^2] < \infty$, on obtient :

$$\mathbb{E}[\|e_{\det}^k\|_{\mathcal{H}}^2] \leq C_{\det} (N^{-4} + (\Delta t)^2) \leq C_0 (N^{-1} + (\Delta t)^{1/2}).$$

Étape 3 : Décomposition de l'erreur stochastique.

Réécrivons la somme stochastique discrète sous forme d'une intégrale continue en posant la fonction en escalier $\kappa(s) = t_{\lfloor s/\Delta t \rfloor}$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} S_{\Delta t}^{k-1-j} P_N \sigma(U^j) \Delta W_N^j = \int_0^{t_k} S_{\Delta t}^{k-1-\lfloor s/\Delta t \rfloor} P_N \sigma(U^{\lfloor s/\Delta t \rfloor}) P_N dW(s),$$

en utilisant le fait que $dW_N(s) = P_N dW(s)$. L'erreur stochastique s'écrit donc :

$$I_{\text{stoch}}^k = \int_0^{t_k} \left(S_{\Delta t}^{k-1-\lfloor s/\Delta t \rfloor} P_N \sigma(U^{\lfloor s/\Delta t \rfloor}) P_N - e^{(t_k-s)\Delta} \sigma(u(s)) \right) dW(s).$$

Par l'isométrie d'Itô en dimension infinie (Proposition 3.2) et l'inégalité de convexité, on a :

$$\mathbb{E}[\|I_{\text{stoch}}^k\|_{\mathcal{H}}^2] \leq 4(J_1 + J_2 + J_3 + J_4),$$

avec :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{t_k} \mathbb{E} \left\| S_{\Delta t}^{k-1-\lfloor s/\Delta t \rfloor} P_N (\sigma(U^{\lfloor s/\Delta t \rfloor}) - \sigma(u(\kappa(s)))) P_N \right\|_{\text{HS}}^2 ds, \\ J_2 &= \int_0^{t_k} \mathbb{E} \left\| S_{\Delta t}^{k-1-\lfloor s/\Delta t \rfloor} P_N (\sigma(u(\kappa(s))) - \sigma(u(s))) P_N \right\|_{\text{HS}}^2 ds, \\ J_3 &= \int_0^{t_k} \mathbb{E} \left\| (S_{\Delta t}^{k-1-\lfloor s/\Delta t \rfloor} P_N - e^{(t_k-s)\Delta}) \sigma(u(s)) P_N \right\|_{\text{HS}}^2 ds, \\ J_4 &= \int_0^{t_k} \mathbb{E} \left\| e^{(t_k-s)\Delta} \sigma(u(s)) (\text{Id} - P_N) \right\|_{\text{HS}}^2 ds. \end{aligned}$$

Étape 4 : Évaluation des erreurs d'opérateur J_3 et de troncature spatiale J_4 .

Le terme J_3 capte l'erreur du schéma temporel sur les modes résolus ($m \leq N$), tandis que J_4 quantifie l'erreur de troncature spatiale du bruit sur les modes résiduels ($m > N$). Dans le cas d'un bruit multiplicatif général $\sigma(u)$, le contrôle rigoureux de ces termes requiert l'introduction d'espaces de Sobolev fractionnaires et des estimations fines de commutateurs d'opérateurs dont le développement technique dépasse le cadre de ce polycopié (nous renvoyons à Kruse [12, Théorème 3.14] pour la démonstration complète). Pour mettre en lumière le mécanisme d'amortissement parabolique sans alourdir la rédaction, nous menons ici l'estimation explicite de J_4 et J_3 dans le cas d'un bruit additif ($\sigma(u) \equiv \sigma$, où $\|\sigma\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M = \sigma$).

— Modes élevés et troncature spatiale (J_4 , $m > N$) :

Développons la norme de Hilbert-Schmidt de J_4 sur la base orthonormée $(e_m)_{m \geq 1}$. Comme $(\text{Id} - P_N)e_m = 0$ pour tout $m \leq N$ et $(\text{Id} - P_N)e_m = e_m$ pour tout $m > N$, on a :

$$\begin{aligned} J_4 &\leq \int_0^{t_k} \|e^{(t_k-s)\Delta}\|_{\mathcal{L}_2((\mathcal{H}_N)^\perp, \mathcal{H})}^2 \mathbb{E} \left[\|\sigma(u(s))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \right] ds \\ &\leq M^2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \int_0^{t_k} \|e^{(t_k-s)\Delta} e_m\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &= M^2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \int_0^{t_k} e^{-2\lambda_m(t_k-s)} ds \\ &= M^2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\lambda_m t_k}}{2\lambda_m} \leq M^2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_m}. \end{aligned}$$

En exploitant la croissance des valeurs propres $\lambda_m = c_0 m^2$ en dimension $d = 1$, la comparaison série-intégrale fournit :

$$J_4 \leq \frac{M^2}{2c_0} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq \frac{M^2}{2c_0} \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{M^2}{2c_0 N} = O(N^{-1}).$$

— **Modes approchés et schéma temporel** (J_3 , $m \leq N$) :

Puisque $P_N e_m = e_m$ pour $m \leq N$ et $P_N e_m = 0$ pour $m > N$, la norme de Hilbert-Schmidt de J_3 se réduit à la somme finie sur les N premiers modes :

$$\begin{aligned} J_3 &\leq M^2 \sum_{m=1}^N \int_0^{t_k} \left\| (S_{\Delta t}^{k-1-\lfloor s/\Delta t \rfloor} - e^{(t_k-s)\Delta}) e_m \right\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\ &= M^2 \sum_{m=1}^N \int_0^{t_k} \left| \mu_m^{k-1-\lfloor s/\Delta t \rfloor} - e^{-\lambda_m(t_k-s)} \right|^2 ds. \end{aligned}$$

Sur chaque intervalle temporel $[t_j, t_{j+1}[$, on décompose l'écart sous la forme :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \mu_m^{k-1-j} - e^{-\lambda_m(t_k-s)} \right|^2 ds \leq 2\Delta t \left| \mu_m^{k-1-j} - e^{-\lambda_m(t_k-t_j)} \right|^2 + 2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| e^{-\lambda_m(t_k-t_j)} - e^{-\lambda_m(t_k-s)} \right|^2 ds.$$

La sommation sur $j \in \{0, \dots, k-1\}$ puis sur $m \in \{1, \dots, N\}$ de ces intégrales d'écart d'exponentielle constitue une estimation standard des schémas d'approximation parabolique (voir Kruse [12, Théorème 3.14]), qui conduit à :

$$J_3 \leq M^2 \sum_{m=1}^N \int_0^{t_k} \left| \mu_m^{k-1-\lfloor s/\Delta t \rfloor} - e^{-\lambda_m(t_k-s)} \right|^2 ds \leq C_3(\Delta t)^{1/2}.$$

En sommant ces deux contributions, on obtient :

$$J_3 + J_4 \leq C'' \left(N^{-1} + (\Delta t)^{1/2} \right).$$

Étape 5 : Évaluation des termes J_2 et J_1 .

- **Pour J_2** : Par la régularité höldérienne de la solution *mild* continue (Théorème 4.8), on a pour tout $s \in [t_j, t_{j+1}[$ l'estimation $\mathbb{E}[\|u(t_j) - u(s)\|_{\mathcal{H}}^2] \leq C_{\text{reg}}(\Delta t)^{1/2}$. En exploitant l'hypothèse lipschitzienne **(H1)** sur σ et l'estimation du noyau singulier discret $\|S_{\Delta t}^{k-1-j} P_N\|_{\text{HS}}^2 \leq C_4(t_k - t_j)^{-1/2}$ établie ci-dessous, la somme se majore par $\sum_{j=0}^{k-1} \Delta t (t_k - t_j)^{-1/2} \leq \int_0^T s^{-1/2} ds = 2\sqrt{T} < \infty$. Il vient donc :

$$J_2 \leq C'(\Delta t)^{1/2}.$$

- **Pour J_1** : Par la propriété d'idéal bilatère de $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ et l'hypothèse lipschitzienne **(H1)**, on a pour tout $s \in [t_j, t_{j+1}[$:

$$\left\| S_{\Delta t}^{k-1-j} P_N (\sigma(U^j) - \sigma(u(t_j))) P_N \right\|_{\text{HS}}^2 \leq C_1^2 \left\| S_{\Delta t}^{k-1-j} P_N \right\|_{\text{HS}}^2 \|e^j\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Sous la condition CFL spectrale $\Delta t \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{\lambda_N}$, on a $|1 - \lambda_n \Delta t| \leq e^{-\varepsilon \lambda_n \Delta t}$ pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$. Posons $m = k - 1 - j \geq 0$.

- Si $m \geq 1$, la minoration $m \geq \frac{m+1}{2}$ entraîne $(1 - \lambda_n \Delta t)^{2m} \leq e^{-2\varepsilon m \lambda_n \Delta t} \leq e^{-\varepsilon(m+1)\lambda_n \Delta t}$. La comparaison série-intégrale avec $\lambda_n \geq c_0 n^2$ donne :

$$\|S_{\Delta t}^m P_N\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{n=1}^N (1 - \lambda_n \Delta t)^{2m} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(m+1)\lambda_n \Delta t} \leq \frac{C_*}{\sqrt{\varepsilon}} ((m+1)\Delta t)^{-1/2}.$$

- Si $m = 0$, on a directement $\|S_{\Delta t}^0 P_N\|_{\text{HS}}^2 = \|P_N\|_{\text{HS}}^2 = N$. Comme la condition CFL spectrale impose $\lambda_N = c_0 N^2 \leq \frac{2(1-\varepsilon)}{\Delta t}$, on en déduit :

$$N \leq \sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)}{c_0}} (\Delta t)^{-1/2} =: C_{\text{CFL}} ((0+1)\Delta t)^{-1/2}.$$

En posant $C_4 = \max\left(\frac{C_*}{\sqrt{\varepsilon}}, C_{\text{CFL}}\right)$, on a donc $\|S_{\Delta t}^m P_N\|_{\text{HS}}^2 \leq C_4 ((m+1)\Delta t)^{-1/2}$ pour tout $m \geq 0$. Puisque $(m+1)\Delta t = (k-j)\Delta t = t_k - t_j$, l'intégration en temps sur chaque sous-intervalle $[t_j, t_{j+1}[$ donne :

$$J_1 \leq C_1^2 C_4 \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} (t_k - t_j)^{-1/2} \mathbb{E}[\|e^j\|_{\mathcal{H}}^2].$$

Étape 6 : Lemme de Gronwall singulier discret et conclusion.

En regroupant les estimations des Étapes 2, 4 et 5, l'erreur globale satisfait pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ l'inégalité intégrale discrète :

$$\mathbb{E} [\|e^k\|_{\mathcal{H}}^2] \leq K_0 \left(N^{-1} + (\Delta t)^{1/2} \right) + L \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} (t_k - t_j)^{-1/2} \mathbb{E} [\|e^j\|_{\mathcal{H}}^2],$$

où $K_0, L > 0$ sont des constantes indépendantes de N, k et Δt .

Par le lemme de Gronwall discret à noyau singulier (voir Kruse [12, Lemme A.4] ou Dixon et McKee [4]), il existe une constante $C(L, T) > 0$ telle que :

$$\sup_{0 \leq k \leq K} \mathbb{E} [\|e^k\|_{\mathcal{H}}^2] \leq C(L, T) K_0 \left(N^{-1} + (\Delta t)^{1/2} \right).$$

En extrayant la racine carrée et en utilisant $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, on obtient :

$$\sup_{0 \leq k \leq K} \left(\mathbb{E} [\|u(t_k) - U^k\|_{\mathcal{H}}^2] \right)^{1/2} \leq C \left(N^{-1/2} + (\Delta t)^{1/4} \right),$$

ce qui achève rigoureusement la démonstration. $\square$

Remarque 24 (Régularisation spectrale et lien avec le bruit tronqué). *L'estimation du terme J_4 met en lumière le rôle central de la régularisation parabolique face à la troncature spectrale. Bien que le mouvement brownien cylindrique W n'appartienne pas à $\mathcal{H}$ (sa variance y étant formellement infinie, comme rappelé au Théorème 5.1), l'action lissante du semi-groupe de la chaleur compense la divergence des hautes fréquences en apportant un gain de régularité de deux ordres spatiaux (λ_m^{-1}). C'est ce mécanisme dissipatif qui permet au reste spectral $\sum_{m=N+1}^{\infty} \lambda_m^{-1}$ de converger vers 0 et d'assurer une erreur uniforme en N .*

Remarque 25 (Perte de régularité et ordre fort en temps). *L'ordre temporel en $(\Delta t)^{1/4}$ (au lieu de $(\Delta t)^{1/2}$ en dimension finie) traduit l'obstruction dimensionnelle induite par $\mathcal{H}$ et la rugosité du mouvement brownien cylindrique. Le caractère multiplicatif du bruit préserve cet ordre fort de $1/4$, pourvu que σ satisfasse la condition de Lipschitz (H1).*

Théorème 5.3 (Vitesse de convergence faible). *Soit $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle test de classe $\mathcal{C}_b^3(\mathcal{H})$ (trois fois continûment Fréchet-différentiable à différentielles bornées).*

Dans le cadre d'un bruit additif ($\sigma(u) \equiv \sigma$) et sous les hypothèses du Théorème 5.2, les fluctuations stochastiques se compensent en moyenne et l'erreur faible bénéficie d'un doublement des vitesses de convergence :

$$\sup_{k \in \{0, \dots, K\}} |\mathbb{E}[\phi(u(t_k))] - \mathbb{E}[\phi(U^k)]| \leq C_{\text{faible}} \left(N^{-1} + (\Delta t)^{1/2} \right),$$

où $C_{\text{faible}} > 0$ est une constante finie indépendante de N et de Δt .

Idée de la démonstration. Contrairement à l'erreur forte qui suit les trajectoires pas à pas, l'analyse de l'erreur faible repose sur la fonction valeur déterministe $v(t, x) = \mathbb{E}[\phi(u(T)) \mid u(t) = x]$ définie sur $[0, T] \times \mathcal{H}$.

La fonction v est solution de l'équation de Kolmogorov rétrograde en dimension infinie :

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) + \langle x, \Delta D_x v(t, x) \rangle_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma \sigma^* D_{xx}^2 v(t, x)) = 0, & t \in [0, T], \\ v(T, x) = \phi(x). \end{cases}$$

En appliquant la formule d'Itô discrète le long de la chaîne d'itérées du schéma d'Euler-Maruyama spectral $(U^k)_{0 \leq k \leq K}$, l'erreur s'écrit comme une somme télescopique :

$$\mathbb{E}[\phi(u(T))] - \mathbb{E}[\phi(U^K)] = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E} [v(t_{k+1}, U^{k+1}) - v(t_k, U^k)].$$

Grâce à l'annulation des termes de dérive et de diffusion par l'équation aux dérivées partielles satisfaite par v , le développement de Taylor fait intervenir les dérivées d'ordre supérieur $D_x^2 v$ et $D_x^3 v$. L'action lissante du semi-groupe sur ces différentielles permet de doubler les ordres par rapport à l'analyse en moyenne quadratique. Pour les détails techniques complets de cette estimation, on renvoie à Kruse [12, Théorème 5.12]. $\square$

Remarque 26 (Majoration directe par l'erreur forte en bruit multiplicatif). *Dans le cas général d'un bruit multiplicatif $\sigma(u)$, l'erreur de discrétisation de l'amplitude du bruit réinjecte des perturbations à chaque pas. Si l'on ne dispose pas de commutateurs spectraux favorables, on peut toutefois obtenir un contrôle direct pour toute observable L -lipschitzienne via l'inégalité de Jensen :*

$$|\mathbb{E}[\phi(u(t_k))] - \mathbb{E}[\phi(U^k)]| \leq L \mathbb{E}[\|u(t_k) - U^k\|_{\mathcal{H}}] \leq L (\mathbb{E}[\|u(t_k) - U^k\|_{\mathcal{H}}^2])^{1/2}.$$

Le Théorème 5.2 fournit alors immédiatement la borne $O(N^{-1/2} + (\Delta t)^{1/4})$. Ce procédé direct montre que l'ordre faible est toujours au moins égal à l'ordre fort.

5.3 Simulations

Cette dernière sous-section est dédiée à la mise en œuvre pratique, à la visualisation et à l'analyse des trajectoires de notre EDPS. À l'aide de l'outil informatique, notre objectif est double. D'une part, nous voulons observer de manière concrète comment réagit la solution lorsque l'on fait varier la condition initiale u_0 et la fonction de diffusion $\sigma(u)$ qui module l'intensité de l'aléa. D'autre part, nous cherchons à vérifier numériquement si nos simulations confirment les théorèmes de régularité mathématique que nous avons démontrés dans les chapitres précédents.

Implémentation du schéma et stabilité : Dans la section précédente, nous avons défini le schéma d'Euler-Maruyama spectral explicite (Définition 5.5). Concrètement, l'algorithme met à jour le vecteur des N coordonnées spectrales $U^k = [u_1^k, \dots, u_N^k]^T \in \mathbb{R}^N$ à chaque pas de temps via la relation matricielle :

$$U^{k+1} = (I + \Delta t A_N) U^k + \Sigma(U^k) \Delta W_N^k,$$

où $\Sigma(U^k) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ représente la matrice de diffusion projetée sur les modes et $\Delta W_N^k \sim \mathcal{N}(0, \Delta t I_N)$ est le vecteur des incréments browniens indépendants.

Comme établi dans la Proposition 5.2, l'utilisation d'un schéma explicite sur les composantes spectrales impose une contrainte de stabilité stricte dictée par le mode spatial de plus haute fréquence λ_N . Pour garantir la stabilité numérique et empêcher l'accumulation divergente de la variance stochastique, le pas de temps doit impérativement respecter la condition CFL spectrale sous-critique $\Delta t < 2/\lambda_N$.

Reconstruction spatiale et approche pseudo-spectrale : Bien que la dynamique stochastique soit intégrée dans l'espace spectral $\mathbb{R}^N$, l'évaluation ponctuelle du terme de diffusion non linéaire $\sigma(u)$ et le tracé des trajectoires requièrent un retour dans l'espace physique. Sur le domaine spatial normalisé $\mathcal{O} = (0, 1)$ (où $a = 0$ et $b = 1$), nous introduisons une grille spatiale uniforme de pas $h = 1/(M+1)$ définie par les nœuds $x_i = ih$ pour $i \in \{0, \dots, M+1\}$.

Le passage du vecteur spectral $U^k \in \mathbb{R}^N$ aux valeurs nodales sur la grille spatiale $u^k \in \mathbb{R}^{M+2}$ s'effectue par la matrice d'évaluation spectrale $P \in \mathbb{R}^{(M+2) \times N}$, dont les coefficients sont donnés par les fonctions propres aux nœuds (Remarque 21) :

$$P_{i,j} = e_j(x_i) = \sqrt{2} \sin(j\pi x_i), \quad \forall i \in \{0, \dots, M+1\}, \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

de sorte que $u^k = P U^k$. Aux bords, les conditions de Dirichlet homogènes imposent $u_0^k = u_{M+1}^k = 0$.

Pour évaluer la diffusion, on procède de manière pseudo-spectrale : on calcule d'abord ponctuellement les valeurs $\sigma(u(t_k, x_i))$ sur la grille physique, puis on projette le vecteur résultant sur la base des fonctions propres par quadrature trapézoïdale pour obtenir les composantes spectrales requises par le schéma.

Remarque 27 (Échantillonnage spatial et critère de Shannon-Nyquist). *Pour visualiser correctement les N modes oscillants sans déformer la solution (phénomène de repliement spectral), le théorème de Shannon-Nyquist stipule que le maillage spatial doit contenir au moins deux fois plus de points que de modes ($M \geq 2N$). Notre choix de $N = 100$ et $M = 200$ points intérieurs garantit donc que toutes les fonctions propres sont tracées fidèlement sur la grille, sans distorsion d'échantillonnage.*

Nous fixons les paramètres numériques qui seront utilisés de manière identique pour l'ensemble de nos simulations graphiques. Ces valeurs sont synthétisées dans le Tableau 1. Le pas de temps Δt est choisi pour satisfaire la condition de stabilité spectrale $\Delta t < 2/\lambda_N$, tout en assurant une résolution adéquate pour l'estimation empirique de la régularité höldérienne des trajectoires.

Paramètre numérique	Symbole	Valeur adoptée
Nombre de points spatiaux	M	200
Nombre de modes spectraux	N	100
Borne inférieure du domaine spatial	a	0
Borne supérieure du domaine spatial	b	1
Pas spatial de la grille de visualisation	h	$\frac{b-a}{M+1} \approx 4,97 \times 10^{-3}$
Horizon temporel final	T	1,0
Pas de discrétisation temporel	Δt	$1,24 \times 10^{-5}$

TABLE 1 – Configuration des paramètres de discrétisation pour les simulations numériques.

La trajectoire temporelle discrète nécessite ainsi un total de $K = \frac{T}{\Delta t} \approx 80\,645$ pas de temps pour atteindre l'horizon final $T = 1,0$.

Simulation avec condition initiale en créneau

Pour cette première simulation stochastique, nous reprenons exactement la même condition initiale en créneau que celle utilisée pour la version déterministe (Figure 2). Cela permet de comparer directement les deux dynamiques.

La Figure 4 montre le comportement global de la solution avec le coefficient $\sigma(u) = 0,5(u + 1)$. On observe bien un aspect rugueux sur tout le domaine, tandis que la solution reste nulle aux bords $x = 0$ et $x = 1$.

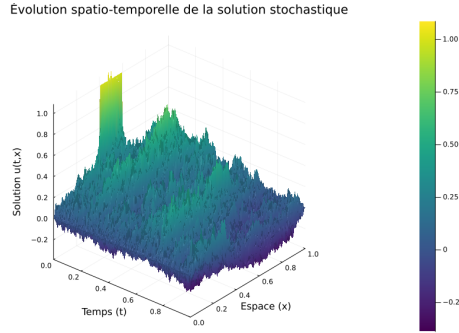


FIGURE 4 – Évolution spatio-temporelle de la solution stochastique avec condition initiale en créneau ($\sigma(u) = 0,5(u + 1)$).

Pour analyser plus finement cette dynamique, nous étudions les profils de la solution aux premiers instants (Figure 5) en les comparant à la solution déterministe (Figure 2).

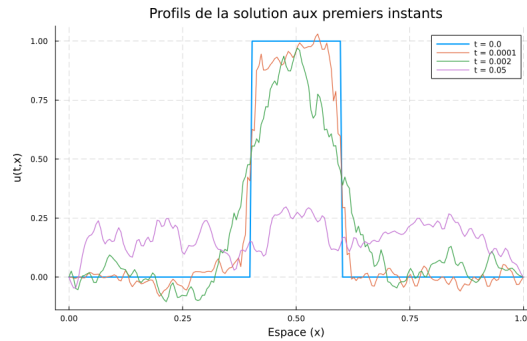


FIGURE 5 – Profils spatiaux de la solution stochastique aux premiers instants pour la condition initiale en créneau.

Dès l'instant $t = 0,0001$, la comparaison avec le cas déterministe est saisissante. Alors que le semi-groupe thermique déterministe lisse instantanément les discontinuités du créneau initial (Figure 2), la trajectoire de l'EDPS présente des fluctuations spatiales permanentes et non différentiables sous l'action continue du bruit blanc cylindrique (Figure 5). À $t = 0,05$, alors que la solution déterministe s'est presque totalement diffusée vers l'état stationnaire, la trajectoire stochastique continue de fluctuer à toutes les échelles autour de ce profil moyen.

Pour évaluer empiriquement la régularité temporelle höldérienne de la trajectoire simulée, nous calculons la moyenne temporelle des accroissements en norme $\mathcal{H}$ pour différents pas de décalage temporel $\tau = m\Delta t$:

$$\delta(\tau) = \frac{1}{K-m} \sum_{k=0}^{K-m-1} \|U^{k+m} - U^k\|_{\mathcal{H}}.$$

D'après le Théorème 4.8, on attend asymptotiquement $\mathbb{E}[\|u(t+\tau) - u(t)\|_{\mathcal{H}}] \sim \tau^\beta$. L'exposant β est donc estimé par régression linéaire sur le tracé en échelle logarithmique de $\log(\delta(\tau))$ en fonction de $\log(\tau)$ (Figure 6).

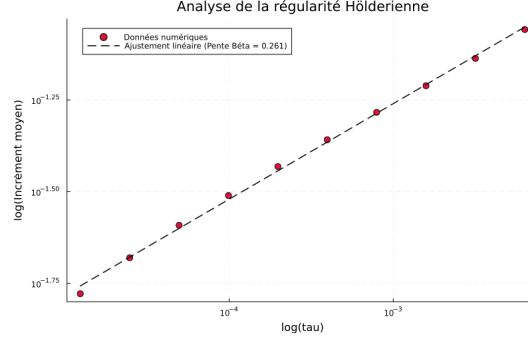


FIGURE 6 – Estimation numérique de l'exposant de Hölder temporel pour la condition initiale en créneau ($\beta \approx 0,261$).

L'ajustement linéaire fournit une pente expérimentale $\beta = 0,261$, en accord remarquable avec la borne théorique $\beta < 1/4 = 0,25$ établie au Théorème 4.8. Le fait que la valeur numérique soit légèrement supérieure à 0,25 s'explique directement par la troncature spectrale spatiale : en limitant le bruit aux $N = 100$ premiers modes, on élimine les fréquences spatiales arbitrairement élevées ($n > 100$) qui sont responsables de la rugosité limite en dimension infinie. Le processus simulé est donc marginalement plus régulier que la solution continue idéale.

Simulation avec condition initiale stochastique

Pour cette seconde expérience numérique, nous remplaçons le profil déterministe par une condition initiale rugueuse simulant un bruit blanc spatial tronqué. Le vecteur spectral initial est généré selon une loi normale centrée réduite $V = [v_1, \dots, v_N]^T \sim \mathcal{N}(0, I_N)$, de sorte que les valeurs initiales sur la grille physique sont données par $u^0 = PV$. Par ailleurs, nous retenons le coefficient de diffusion non linéaire $\sigma(u) = 2 \cos(u) + 1$.

La Figure 7 illustre la dynamique spatio-temporelle obtenue. Les fluctuations initiales de forte amplitude à $t = 0$ imposent une échelle verticale étendue (de -20 à $+30$), ce qui atténue visuellement le relief des oscillations stochastiques aux instants ultérieurs. Dès les premiers pas de temps, la solution relaxe rapidement vers des amplitudes modérées, au sein desquelles le forçage stochastique demeure pleinement actif.

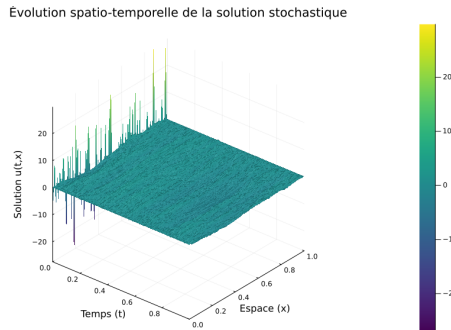


FIGURE 7 – Surface spatio-temporelle avec condition initiale de bruit blanc spatial ($\sigma(u) = 2 \cos(u) + 1$).

Les profils spatiaux représentés sur la Figure 8 mettent en évidence l'effet régularisant du semi-groupe. À l'instant initial $t = 0$, la trajectoire présente de fortes oscillations spatiales non corrélées. Dès $t = 0,0001$, l'action dissipative

du Laplacien amortit préférentiellement les composantes de haute fréquence spectrale ($\lambda_n \sim n^2$) et rétablit un profil spatialement continu. À $t = 0,05$, l'influence de la donnée initiale a été dissipée et la solution fluctue autour de zéro selon le régime stationnaire du bruit de fond.

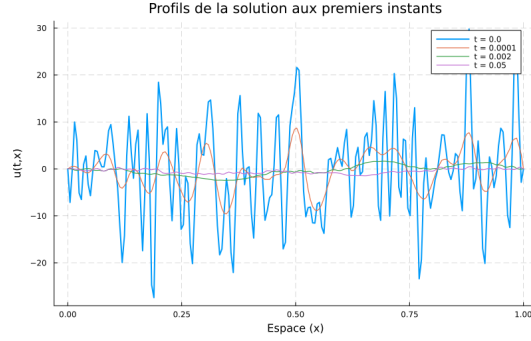


FIGURE 8 – Profils spatiaux illustrant l’amortissement rapide des hautes fréquences de la condition initiale stochastique.

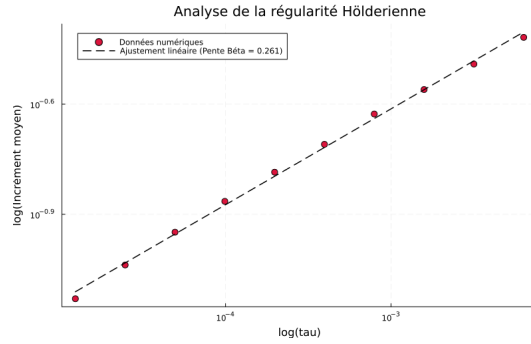


FIGURE 9 – Estimation numérique de la régularité temporelle avec condition initiale de bruit blanc ($\beta \approx 0,261$).

L’estimation numérique de la régularité temporelle (Figure 9) fournit une pente $\beta = 0,261$, identique à celle mesurée pour la condition initiale en créneau et en parfait accord avec le seuil théorique de 0,25. Ce résultat confirme que la rugosité locale des trajectoires en temps long est une propriété intrinsèque de l’opérateur de forçage stochastique cylindrique, indépendante de la régularité de la condition initiale.

Remarque 28 (Origine de l’exposant 1/4 et cas unimodal). *L’exposant limite $\beta < 1/4$ provient de l’excitation uniforme des modes par le bruit cylindrique, la série de variance vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-2\lambda_n \tau}}{2\lambda_n} \sim \tau^{1/2}$ en dimension $d = 1$.*

Si l’on impose une condition initiale très lisse concentrée sur la fréquence fondamentale ($u(0, x) = \sin(\pi x) = e_1(x)$) combinée à une diffusion stochastique très faible ($\sigma(u) = 0, 1u$), la dynamique reste dominée par le premier mode spectral. L’équation se réduit alors pratiquement à l’EDS scalaire régissant $u_1(t)$ sous l’action d’un unique mouvement brownien standard $\beta_1(t)$. Dans ce cas dégénéré, la régularité temporelle mesurée remonte numériquement vers $\beta \approx 0,50$, qui est l’exposant höldérien classique d’un mouvement brownien réel unidimensionnel.

Simulation avec bruit coloré

Nous étudions l’impact de la corrélation spatiale du forçage aléatoire en substituant au bruit blanc cylindrique un bruit corrélé en espace (bruit coloré). Pour ce faire, nous introduisons un opérateur de covariance spatiale $Q \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ diagonal dans la base des fonctions propres du Laplacien, caractérisé par les valeurs propres :

$$Qe_j = q_j e_j \quad \text{avec} \quad q_j = j^{-s}, \quad \forall j \geq 1,$$

pour un exposant de décroissance spectrale $s > 1$. Cette condition de décroissance garantit la sommabilité de la série de Riemann associée, d’où :

$$\text{tr}(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s} < +\infty.$$

L'opérateur Q étant linéaire, symétrique, positif et à trace finie sur $\mathcal{H}$, la Proposition 2.10 assure l'existence de la mesure gaussienne sur $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{O})$. L'incorporation de ce bruit coloré consiste à appliquer la racine carrée $Q^{1/2}$ à l'accroissement brownien cylindrique. En vertu du Théorème 2.5 (ou de la Proposition 3.4), l'action d'un opérateur continu A sur le bruit engendre une covariance spatiale AA^* . Comme Q est auto-adjoint et positif, le choix $A = Q^{1/2}$ assure que l'opérateur de covariance est :

$$AA^* = Q^{1/2}(Q^{1/2})^* = Q^{1/2}Q^{1/2} = Q.$$

Concrètement, puisque les fonctions propres $(e_j)_{j \geq 1}$ diagonalisent Q avec $Qe_j = q_j e_j$, l'opérateur racine vérifie $Q^{1/2}e_j = \sqrt{q_j}e_j$. Conformément à la construction spectrale canonique des mesures gaussiennes sur un espace de Hilbert (Proposition 2.10, Étape 2), l'accroissement du bruit coloré tronqué s'obtient en pondérant chaque mode brownien par son écart-type spectral $\sqrt{q_j} = j^{-s/2}$:

$$Q^{1/2}\Delta W_N^k = \sum_{j=1}^N Q^{1/2}(\Delta\beta_j^k e_j) = \sum_{j=1}^N \sqrt{q_j} \Delta\beta_j^k e_j = \sum_{j=1}^N j^{-s/2} \Delta\beta_j^k e_j.$$

Pour tous modes $i, m \in \{1, \dots, N\}$, l'indépendance des accroissements réels $\mathbb{E}[\Delta\beta_i^k \Delta\beta_m^k] = \Delta t \delta_{i,m}$ restitue bien la structure de covariance attendue sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\mathbb{E}[\langle Q^{1/2}\Delta W_N^k, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \langle Q^{1/2}\Delta W_N^k, e_m \rangle_{\mathcal{H}}] = \sqrt{q_i q_m} \mathbb{E}[\Delta\beta_i^k \Delta\beta_m^k] = \Delta t q_i \delta_{i,m} = \Delta t \langle Q e_i, e_m \rangle_{\mathcal{H}},$$

où les $(\Delta\beta_j^k)_{1 \leq j \leq N}$ demeurent des variables gaussiennes réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Afin d'isoler l'influence stricte de cette corrélation spatiale, nous retenons un profil $s = 2,0$ et conservons l'ensemble des autres paramètres de discrétisation : la condition initiale en créneau discontinu, l'horizon temporel final $T = 1,0$ et le coefficient de diffusion $\sigma(u) = 0,5(u + 1)$.

Évolution spatio-temporelle de la solution stochastique

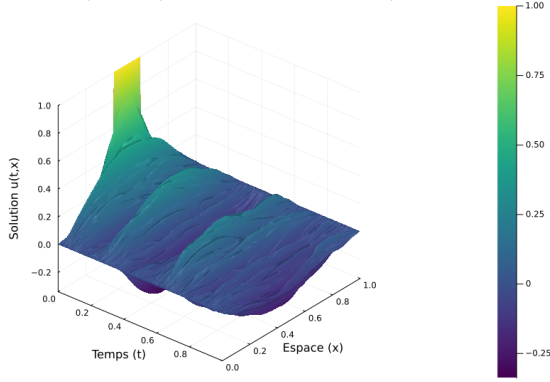


FIGURE 10 – Surface spatio-temporelle avec bruit coloré ($s = 2,0$).

Profils de la solution aux premiers instants

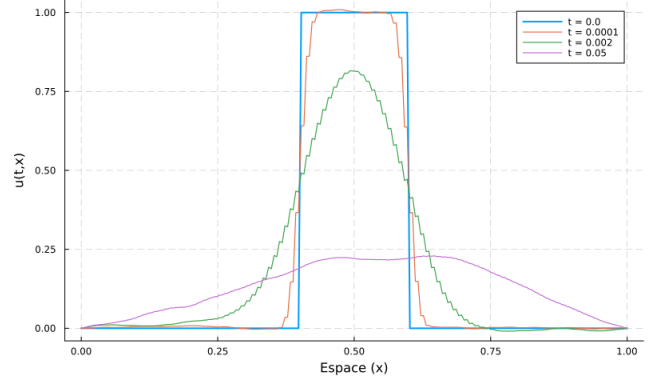


FIGURE 11 – Profils spatiaux avec bruit coloré ($s = 2,0$).

La Figure 10 met en évidence une régularité spatiale considérablement accrue par rapport au cas du bruit cylindrique. En atténuant rapidement l'amplitude des fréquences élevées ($q_j = j^{-2}$), l'opérateur de covariance Q filtre les petites échelles spatiales et empêche l'apparition des micro-oscillations rugueuses non différentiables.

Les profils instantanés (Figure 11) confirment ce lissage spectral : aux instants $t = 0,0001$ et $t = 0,002$, la solution diffuse de façon beaucoup plus continue et structurée, tout en intégrant des fluctuations macroscopiques cohérentes induites par les modes de basse fréquence.

Enfin, l'analyse de régularité höldérienne (Figure 12) montre une modification significative de la dynamique :

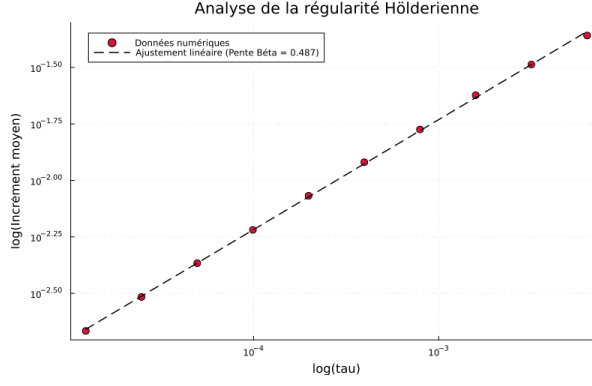


FIGURE 12 – Régularité de Hölder avec bruit coloré ($s = 2,0$, $\beta \approx 0,487$).

On observe ici une pente $\beta = 0,487$. Cette valeur, nettement supérieure à celle obtenue pour le bruit blanc ($\beta \approx 0,26$), illustre mathématiquement l'effet de la régularisation : en filtrant les hautes fréquences, le bruit coloré permet à la trajectoire d'être plus régulière en temps, se rapprochant ainsi d'un comportement plus proche de la diffusion déterministe tout en conservant une signature stochastique propre à l'opérateur de covariance choisi.

Simulation avec schéma d'Euler-Maruyama semi-implicite

Afin de s'affranchir de la contrainte CFL spectrale imposée par le schéma explicite ($\Delta t < 2/\lambda_N$), nous mettons en œuvre le schéma d'Euler-Maruyama semi-implicite (drift implicite, diffusion explicite). La mise à jour du vecteur spectral $U^k \in \mathbb{R}^N$ s'écrit :

$$(I - \Delta t A_N)U^{k+1} = U^k + \Sigma(U^k)\Delta W_N^k.$$

Puisque la matrice laplacienne discrète $A_N = \text{diag}(-\lambda_1, \dots, -\lambda_N)$ est diagonale dans la base de Fourier, l'inversion de l'opérateur est immédiate et s'effectue sans surcoût algorithmique mode par mode :

$$u_n^{k+1} = \frac{1}{1 + \lambda_n \Delta t} (u_n^k + (\Sigma(U^k)\Delta W_N^k)_n), \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}.$$

Ce schéma bénéficie d'une stabilité inconditionnelle sur sa composante déterministe (les multiplicateurs vérifiant $0 < \frac{1}{1 + \lambda_n \Delta t} < 1$ pour tout $\Delta t > 0$).

Pour analyser le schéma semi-implicite en regard de l'approche explicite, nous conservons les mêmes paramètres physiques et de maillage (condition initiale en crêneau, bruit blanc, $\sigma(u) = 0,5(u+1)$, $N = 100$ et $\Delta t = 1,24 \times 10^{-5}$), mais nous élargissons les instants d'observation ($t \in \{0,001; 0,02; 0,5\}$) afin de mettre en évidence la stabilité inconditionnelle et l'amortissement sur des temps plus longs.

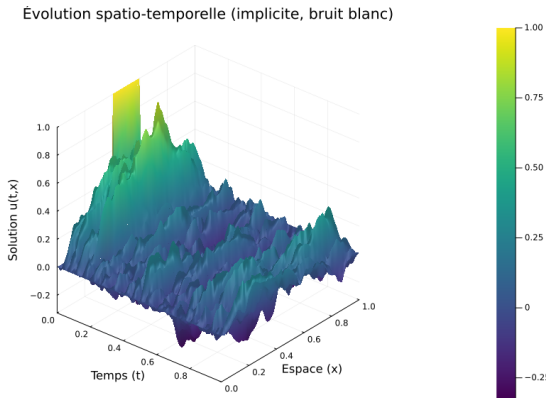


FIGURE 13 – Surface spatio-temporelle avec schéma semi-implicite.

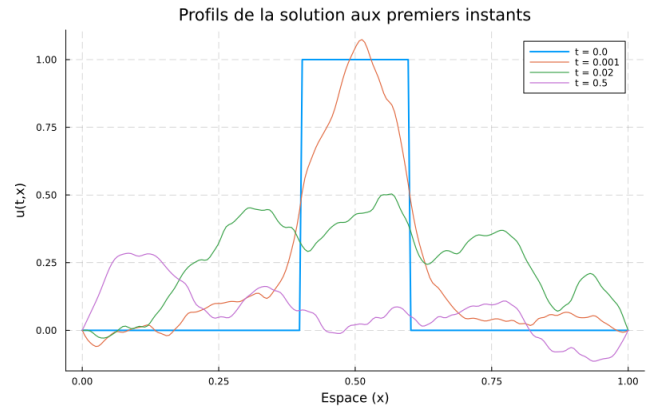


FIGURE 14 – Profils spatiaux avec schéma semi-implicite.

Comparée aux résultats du schéma explicite, la Figure 13 présente une dynamique globale similaire, mais avec un relief de surface visuellement atténué. L'analyse des profils instantanés (Figure 14) confirme cette observation :

aux instants $t = 0,001$ et $t = 0,02$, les trajectoires présentent des oscillations moins découpées. Cette différence traduit la dissipation numérique inhérente au schéma implicite, dont l'opérateur résolvant amortit prématurément les modes de haute fréquence injectés par le bruit.

L'estimation numérique de la régularité temporelle (Figure 15) corrobore quantitativement cette dissipation.

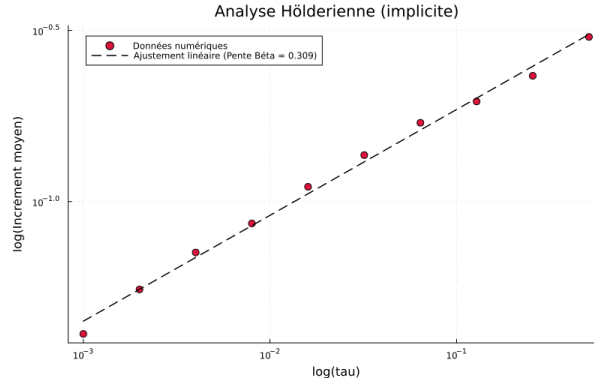


FIGURE 15 – Estimation de la régularité de Hölder avec schéma semi-implicite ($\beta \approx 0,309$).

L'ajustement en échelle logarithmique fournit ici une pente expérimentale $\beta = 0,309$, supérieure à celle mesurée avec le schéma explicite ($\beta = 0,261$) et s'écartant davantage de la borne continue $\beta < 0,25$. Cet écart s'explique par l'action de l'opérateur résolvant $(1 + \lambda_n \Delta t)^{-1}$ sur l'incrément de bruit stochastique à chaque pas de temps. Bien que la résolvante soit paradoxalement moins dissipative sur la dérive déterministe que le semi-groupe exact $((1 + \lambda_n \Delta t)^{-1} > e^{-\lambda_n \Delta t})$, son application directe au terme de diffusion fait chuter la variance injectée sur les modes élevés en $\mathcal{O}(\lambda_n^{-2}) = \mathcal{O}(n^{-4})$ au lieu de $\mathcal{O}(\lambda_n^{-1}) = \mathcal{O}(n^{-2})$ pour la convolution stochastique continue. Ce filtrage sévère des hautes fréquences du bruit cylindrique atténue la rugosité spatio-temporelle et rend la trajectoire discrète artificiellement plus lisse en temps.

Références

- [1] H. Brézis (1983). *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris.
- [2] R. H. Cameron et W. T. Martin (1944). *Transformations of Wiener Integrals Under Translations*. Annals of Mathematics, Vol. 45, No. 2, pp. 386–396.
- [3] G. Da Prato et J. Zabczyk (1992). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] J. Dixon et S. McKee (1986). *Weakly singular discrete Gronwall inequalities*. ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 66, No. 11, pp. 535–544.
- [5] L. C. Evans (2010). *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2nd edition.
- [6] X. Fernique (1970). *Intégrabilité des vecteurs gaussiens*. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Paris, Série A, Vol. 270, pp. 1698–1699.
- [7] M. Hairer (2009). *An Introduction to Stochastic PDEs*. Lecture notes, University of Warwick, arXiv :0907.4178.
- [8] M. Hairer (2014). *A theory of regularity structures*. Inventiones Mathematicae, Vol. 198, No. 2, pp. 269–504.
- [9] K. Itô et M. Nisio (1968). *On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables*. Osaka Journal of Mathematics, Vol. 5, No. 1, pp. 35–48.
- [10] A. Jentzen et P. E. Kloeden (2011). *Taylor Approximations for Stochastic Partial Differential Equations*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 83, SIAM, Philadelphia.
- [11] O. Kallenberg (2002). *Foundations of Modern Probability*. Probability and Its Applications, Springer-Verlag, New York, 2nd edition.
- [12] R. Kruse (2014). *Strong and Weak Approximation of Semilinear Stochastic Evolution Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2093, Springer, Cham.
- [13] C. Prévôt et M. Röckner (2007). *A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1905, Springer, Berlin Heidelberg.
- [14] Yu. V. Prokhorov (1956). *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*. Theory of Probability and Its Applications, Vol. 1, No. 2, pp. 157–214.
- [15] H. Weyl (1912). *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*. Mathematische Annalen, Vol. 71, No. 4, pp. 441–479.