

Correction : Résolution numérique des équations différentielles

Définition de l'erreur de consistance : Pour montrer qu'un schéma $x_{k+1} = x_k + h\Phi(t_k, x_k, h)$ est d'ordre p , on étudie l'erreur de consistance locale $E(h)$ définie par :

$$E(h) = x(t_k + h) - x(t_k) - h\Phi(t_k, x(t_k), h)$$

Le schéma est d'ordre p si $E(h) = O(h^{p+1})$.

Exercice 1 : Schéma d'Euler amélioré

Énoncé : Montrer que le schéma $x_{k+1} = x_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}f(x_k)\right)$ est d'ordre 2.

Démonstration. Calculons l'erreur de consistance locale. On note $x(t)$ la solution exacte, telle que $x'(t) = f(x(t))$.

$$E(h) = x(t_k + h) - x(t_k) - hf\left(x(t_k) + \frac{h}{2}f(x(t_k))\right)$$

Développons la solution exacte (Taylor) à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}x(t_k + h) &= x(t_k) + hx'(t_k) + \frac{h^2}{2}x''(t_k) + O(h^3) \\&= x(t_k) + hf(x(t_k)) + \frac{h^2}{2}f'(x(t_k))f(x(t_k)) + O(h^3)\end{aligned}$$

Développons le terme du schéma (incrément) autour de $h = 0$:

$$f\left(x(t_k) + \frac{h}{2}f(x(t_k))\right) = f(x(t_k)) + \frac{h}{2}f'(x(t_k))f(x(t_k)) + O(h^2)$$

Multiplions cet incrément par h :

$$hf(\dots) = hf(x(t_k)) + \frac{h^2}{2}f'(x(t_k))f(x(t_k)) + O(h^3)$$

En injectant dans la définition de l'erreur de consistance :

$$\begin{aligned}E(h) &= \left[x(t_k) + hf + \frac{h^2}{2}ff'\right] - x(t_k) - \left[hf + \frac{h^2}{2}ff'\right] + O(h^3) \\&= O(h^3)\end{aligned}$$

L'erreur de consistance est en $O(h^3)$, donc le schéma est d'ordre 2. □

Exercice 2 : Méthode de Heun

Schéma : $x_{i+1} = \frac{x_* + x_{**}}{2}$ avec $x_* = x_i + hf(x_i)$ et $x_{**} = x_i + hf(x_*)$. Ce schéma s'écrit sous la forme $x_{i+1} = x_i + h\Phi(t_i, x_i, h)$ avec :

$$\Phi(x, h) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x + hf(x))$$

Démonstration. Calculons l'erreur de consistance $E(h) = x(t+h) - x(t) - h\Phi(x(t), h)$.

$$\text{Exacte : } x(t+h) = x(t) + hf + \frac{h^2}{2}ff' + O(h^3)$$

$$\text{Schéma : } f(x + hf(x)) = f(x) + hf(x)f'(x) + O(h^2)$$

$$\implies \Phi(x, h) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}[f(x) + hf(x)f'(x)] + O(h^2)$$

$$\Phi(x, h) = f(x) + \frac{h}{2}f(x)f'(x) + O(h^2)$$

$$\implies h\Phi(x, h) = hf(x) + \frac{h^2}{2}f(x)f'(x) + O(h^3)$$

En injectant dans la définition de l'erreur de consistance :

$$E(h) = \left(hf + \frac{h^2}{2}ff'\right) - \left(hf + \frac{h^2}{2}ff'\right) + O(h^3) = O(h^3)$$

Le schéma est d'ordre 2. □

Exercice 3 : Schéma paramétré

Schéma : $x_{i+1} = x_i + \alpha hf(x_i) + \beta hf(x_i + \alpha hf(x_i))$.

1. Détermination de α et β On cherche à annuler les termes jusqu'à l'ordre h^2 dans $E(h)$.

$$\begin{aligned} h\Phi(x, h) &= \alpha hf(x) + \beta h[f(x + \alpha hf(x))] \\ &= \alpha hf + \beta h[f + \alpha hf f' + O(h^2)] \\ &= (\alpha + \beta)hf + \alpha\beta h^2 f f' + O(h^3) \end{aligned}$$

On identifie avec le développement de Taylor de $x(t+h) - x(t) = hf + \frac{1}{2}h^2ff' + O(h^3)$:

$$\begin{cases} \text{Terme en } h : & \alpha + \beta = 1 \\ \text{Terme en } h^2 : & \alpha\beta = 1/2 \end{cases}$$

Les solutions sont les racines de $X^2 - X + 1/2 = 0$, soit $\alpha, \beta = \frac{1 \pm i}{2}$.

2. Stabilité Pour démontrer que le schéma est stable, il suffit de montrer que la fonction incrément $\Phi(t, x, h)$ est uniformément Lipschitzienne par rapport à la variable x .

Le schéma s'écrit sous la forme $x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$ avec :

$$\Phi(t, x, h) = \alpha f(x) + \beta f(x + \alpha hf(x))$$

Hypothèse : Supposons que la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est L -Lipschitzienne.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Majorons la différence $|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)|$:

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(y)| &= |\alpha(f(x) - f(y)) + \beta[f(x + \alpha h f(x)) - f(y + \alpha h f(y))]| \\ &\leq |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||f(x + \alpha h f(x)) - f(y + \alpha h f(y))| \end{aligned}$$

En utilisant le caractère L -Lipschitzien de f sur le premier terme :

$$|\alpha||f(x) - f(y)| \leq |\alpha|L|x - y|$$

Pour le second terme, appliquons de nouveau la propriété de f :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= |f(x + \alpha h f(x)) - f(y + \alpha h f(y))| \\ &\leq L|(x - y) + \alpha h(f(x) - f(y))| \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &\leq L(|x - y| + |\alpha h||f(x) - f(y)|) \\ &\leq L(|x - y| + |\alpha h|L|x - y|) \\ &= L(1 + |\alpha h|L)|x - y| \end{aligned}$$

En combinant les deux termes, nous obtenons :

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq [|\alpha|L + |\beta|L(1 + |\alpha h|L)]|x - y|$$

Si l'on considère le pas de temps h borné (par exemple $h \leq h_{max}$), la quantité entre crochets est une constante K_{Lip} indépendante de x .

$$|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)| \leq K_{Lip}|x - y|$$

La fonction incrément est donc uniformément Lipschitzienne en x , ce qui assure la **stabilité numérique** du schéma (au sens de la 0-stabilité). $\square$

Bien que les coefficients α et β soient complexes (avec $\alpha = \frac{1 \pm i}{2}$), ce qui double le coût de stockage et augmente le coût des opérations arithmétiques, cette méthode présente un intérêt majeur la **précision numérique** dans des cas où les schémas réels classiques (comme Euler ou Heun) peuvent souffrir d'instabilités ou d'erreurs d'arrondi.

3. Intérêt de la méthode Contrairement aux méthodes réelles qui estiment les dérivées (implicites dans les méthodes de Runge-Kutta) par des différences finies du type :

$$f'(x) \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

cette méthode souffre d'erreurs d'annulation ("catastrophic cancellation") lorsque h devient très petit, car on soustrait deux nombres très proches.

Avec des coefficients complexes, le schéma exploite le développement de Taylor d'une fonction analytique f :

$$f(x + ih) = f(x) + ihf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3)$$

En prenant la partie imaginaire :

$$f'(x) = \frac{\text{Im}(f(x + ih))}{h} + O(h^2)$$

Justification rigoureuse : Dans notre schéma, le terme $f(x + \alpha h f(x))$ évalue la fonction hors de l'axe réel. Cela permet de capturer l'information sur la dérivée (nécessaire pour obtenir l'ordre 2) sans effectuer de soustraction de termes proches dans $\mathbb{R}$. Ainsi, bien que l'ordre de convergence théorique soit 2 (comme Heun), l'erreur numérique *effective* (liée à l'arithmétique flottante de la machine) est souvent inférieure car elle n'est pas polluée par le bruit de soustraction inhérent aux estimations de dérivées réelles.

Exercice 4 Runge-Kutta RK3

1. Écriture du schéma Le tableau de Butcher donne les coefficients c_i (colonne de gauche), a_{ij} (matrice centrale) et b_i (ligne du bas) pour construire le schéma sous la forme générale :

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

En lisant le tableau fourni :

— **Pour** k_1 (1ère ligne, $c_1 = 0$) :

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

— **Pour** k_2 (2ème ligne, $c_2 = 1/2$, $a_{21} = 1/2$) :

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\left(\frac{1}{2}k_1\right)\right) = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

— **Pour** k_3 (3ème ligne, $c_3 = 1$, $a_{31} = -1$, $a_{32} = 2$) :

$$k_3 = f(t_n + h, y_n + h(-1k_1 + 2k_2)) = f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2)$$

— **Pour** y_{n+1} (Ligne des poids b_i) :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right)$$

Ce qui s'écrit aussi couramment :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Démonstration de l'Ordre 3 Pour prouver que le schéma est d'ordre 3, nous devons montrer que l'erreur de consistance locale est en $O(h^4)$. C'est-à-dire que le développement de Taylor de la solution exacte $y(t_n + h)$ coïncide avec celui de la solution numérique y_{n+1} jusqu'aux termes en h^3 .

Pour simplifier les notations, on note f, f', f'' la fonction et ses dérivées évaluées en y_n .

Énoncé et Définitions

On considère l'équation différentielle autonome $y'(t) = f(y(t))$. Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (RK3) est défini par :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(y_n, h) \quad \text{avec} \quad \Phi(y_n, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (1)$$

où les pentes intermédiaires sont :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n) \\ k_2 &= f\left(y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f(y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{aligned}$$

1. Développement de la solution exacte

Par développement de Taylor au voisinage de t_n :

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + O(h^4)$$

En utilisant l'équation $y' = f(y)$, calculons les dérivées successives (règle de la chaîne) :

$$\begin{aligned} y' &= f \\ y'' &= f' \cdot y' = f'f \\ y''' &= (f'f)' = f''(y')f + f'(f')y' = f''f^2 + (f')^2f \end{aligned}$$

Ainsi, le développement de la solution exacte est :

$$y(t_n + h) = y_n + hf + \frac{h^2}{2}ff' + \frac{h^3}{6}(f''f^2 + f(f')^2) + O(h^4) \quad (2)$$

2. Développement des pentes k_i

On développe les k_i autour de $h = 0$.

Calcul de k_1 :

$$k_1 = f$$

Calcul de k_2 :

$$k_2 = f\left(y_n + \frac{h}{2}f\right)$$

On effectue un développement de Taylor de f autour de y_n :

$$k_2 = f + \left(\frac{h}{2}f\right)f' + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}f\right)^2f'' + O(h^3)$$

$$k_2 = f + \frac{h}{2}ff' + \frac{h^2}{8}f^2f'' + O(h^3)$$

Calcul de k_3 :

$$k_3 = f(y_n + \delta) \quad \text{avec} \quad \delta = -hk_1 + 2hk_2$$

Exprimons d'abord l'incrément δ en utilisant le développement de k_2 :

$$\delta = -hf + 2h\left(f + \frac{h}{2}ff' + \frac{h^2}{8}f^2f''\right) + O(h^4)$$

$$\delta = -hf + 2hf + h^2ff' + O(h^3)$$

$$\delta = hf + h^2ff' + O(h^3)$$

Maintenant, développons $k_3 = f(y_n + \delta)$ à l'ordre suffisant :

$$k_3 = f + \delta f' + \frac{1}{2}\delta^2f'' + O(h^3)$$

En substituant δ :

$$k_3 = f + (hf + h^2ff')f' + \frac{1}{2}(hf)^2f'' + O(h^3)$$

$$k_3 = f + hff' + h^2f(f')^2 + \frac{h^2}{2}f^2f'' + O(h^3)$$

3. Assemblage du schéma numérique

Calculons la somme pondérée $\Phi = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$. Regroupons les termes par puissances de h :

— **Terme constant (ordre h^0 dans Φ , donc h dans y_{n+1}) :**

$$\frac{1}{6}[f + 4(f) + f] = \frac{6f}{6} = f$$

— **Terme en h (ordre h^1 dans Φ , donc h^2 dans y_{n+1}) :**

$$\frac{1}{6} \left[0 + 4 \left(\frac{1}{2} f f' \right) + 1(f f') \right] h = \frac{1}{6} [2f f' + f f'] h = \frac{3}{6} f f' h = \frac{1}{2} f f' h$$

— **Terme en h^2 (ordre h^2 dans Φ , donc h^3 dans y_{n+1}) :**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[0 + 4 \left(\frac{1}{8} f^2 f'' \right) + \left(f(f')^2 + \frac{1}{2} f^2 f'' \right) \right] h^2 \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} f^2 f'' + f(f')^2 + \frac{1}{2} f^2 f'' \right] h^2 \\ &= \frac{1}{6} [f^2 f'' + f(f')^2] h^2 \end{aligned}$$

L'expression finale est donc :

$$h\Phi = hf + \frac{h^2}{2} f f' + \frac{h^3}{6} (f^2 f'' + f(f')^2) + O(h^4) \quad (3)$$

Conclusion

$$y(t_n + h) - y(t_n) - h\phi = O(h^4)$$

Puisque l'erreur locale est en $O(h^{p+1})$ avec $p = 3$, le schéma est bien **d'ordre 3**.

Exercice 5 : Épidémiologie

Modèle : $x' = \alpha x(\beta - x)$ avec $\beta = 1/2$. [cite : 53-56]

- **1. Paramètre α :** Au début ($x \ll \beta$), $x' \approx \alpha\beta x$. Solution $x(t) \approx x_0 e^{\alpha\beta t}$. Si x est multiplié par 1.2 par jour : $e^{\alpha\beta} = 1.2 \implies \alpha = \frac{\ln(1.2)}{\beta} \approx 0.36$.
- **2. Pic :** Le pic épidémique (vitesse x' maximale) pour une logistique est atteint à mi-hauteur de la capacité limite, soit $x_{pic} = \beta/2 = 0.25$.

Exercice 6 : Lotka-Volterra

Question 1 : Équation des courbes intégrales

On considère le système différentiel de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy = x(a - by) \\ y' = -cy + dxy = y(-c + dx) \end{cases} \quad (4)$$

Calcul de l'invariant $F(x, y)$

Pour trouver la relation entre x et y indépendante du temps, on élimine dt en calculant le rapport $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}$$

On sépare les variables (les termes en y d'un côté, les termes en x de l'autre) :

$$\frac{a - by}{y} dy = \frac{-c + dx}{x} dx$$

Ce qui se réécrit :

$$\left(\frac{a}{y} - b\right) dy = \left(-\frac{c}{x} + d\right) dx$$

En intégrant de chaque côté :

$$a \ln(y) - by = -c \ln(x) + dx + K$$

En regroupant les termes variables du même côté, on obtient la fonction invariante (Hamiltonien du système) :

$$F(x, y) = dx - c \ln(x) + by - a \ln(y) = C \quad (5)$$

Nature des courbes

La fonction $u \mapsto u - \ln u$ est convexe et admet un minimum global en $u = 1$. La fonction F est une somme de fonctions de ce type. Les lignes de niveau $F(x, y) = C$ sont donc des courbes fermées. Cela confirme le comportement périodique des populations proies-prédateurs.

Question 2 : Implémentation Python

Voici le code Python permettant de résoudre ce système avec les schémas d'Euler explicite, d'Euler amélioré (Heun) et de Runge-Kutta 4 (RK4).

Listing 1 – Simulation Lotka-Volterra

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# — 1. Parametres du modele —
# Valeurs donnees dans l'annonce
a = np.log(2) / 90
c = np.log(10) / 30
b = a / 10
d = c / 100

def lotka_volterra(t, X):
    """
    X[0] = x (proies), X[1] = y (predateurs)
    Retourne [x', y']
    """
    x, y = X
    dxdt = a*x - b*x*y
    dydt = -c*y + d*x*y
    return np.array([dxdt, dydt])
```

— 2. Schemas Numeriques —

```
def euler_explicite(f, t0, tf, x0, h):
    t = np.arange(t0, tf, h)
    x = np.zeros((len(t), len(x0)))
    x[0] = x0
    for i in range(len(t) - 1):
        x[i+1] = x[i] + h * f(t[i], x[i])
    return t, x

def euler_ameliore(f, t0, tf, x0, h):
    """_Schema_d'ordre_2_(Heun)_"""
    t = np.arange(t0, tf, h)
    x = np.zeros((len(t), len(x0)))
    x[0] = x0
    for i in range(len(t) - 1):
        # Etape predictive
        k1 = f(t[i], x[i])
        x_pred = x[i] + h * k1 # Euler
        # Correction
        x[i+1] = x[i] + (h/2.0) * (f(t[i], x[i]) + f(t[i]+h, x_pred))
    return t, x

def rk4(f, t0, tf, x0, h):
    """_Schema_de_Runge-Kutta_ordre_4_"""
    t = np.arange(t0, tf, h)
    x = np.zeros((len(t), len(x0)))
    x[0] = x0
    for i in range(len(t) - 1):
        k1 = f(t[i], x[i])
        k2 = f(t[i] + h/2, x[i] + h/2 * k1)
        k3 = f(t[i] + h/2, x[i] + h/2 * k2)
        k4 = f(t[i] + h, x[i] + h * k3)
        x[i+1] = x[i] + (h/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
    return t, x
```

— 3. Simulation et Affichage —

Conditions initiales

X0 = [50.0, 20.0] # x0, y0

T_max = 1000

dt_values = [3.0, 1.0, 0.1] # Pas de temps a tester

plt.figure(figsize=(15, 5))

for i, dt in enumerate(dt_values):

Calcul des solutions

t_eu, x_eu = euler_explicite(lotka_volterra, 0, T_max, X0, dt)

t_ea, x_ea = euler_ameliore(lotka_volterra, 0, T_max, X0, dt)

t_rk4, x_rk4 = rk4(lotka_volterra, 0, T_max, X0, dt)

```

# Trace des portraits de phase
plt.subplot(1, 3, i+1)
plt.plot(x_eu[:,0], x_eu[:,1], '—', label='Euler_(Ordre_1)')
plt.plot(x_ea[:,0], x_ea[:,1], '-.', label='Euler_Am_(Ordre_2)')
plt.plot(x_rk4[:,0], x_rk4[:,1], '-', label='RK4_(Ordre_4)')

plt.title(f'Portrait_de_phase_(dt={dt})')
plt.xlabel('Proies_(x)')
plt.ylabel('Predateurs_(y)')
plt.grid(True)
if i == 0: plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Exercice 7 : Convergence d'Euler

Contexte

On considère le problème de Cauchy sur $[0, T]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (6)$$

La fonction f est supposée de classe $C^1(\mathbb{R})$ et L -Lipschitzienne. La méthode d'Euler explicite est définie par $x_{i+1} = x_i + hf(x_i)$.

Question 1. Montrer que la solution exacte x est de classe C^2 sur $[0, T]$.

Démonstration. La solution x vérifie $x'(t) = f(x(t))$.

- Par hypothèse, f est C^1 .
- x est dérivable (car solution d'une EDO $x' = f(x)$ où f est continue).
- Par composition, $t \mapsto f(x(t))$ est dérivable.
- Donc x' est dérivable.

Calculons la dérivée seconde en utilisant la règle de la chaîne :

$$x''(t) = \frac{d}{dt}(f(x(t))) = f'(x(t)) \cdot x'(t) = f'(x(t))f(x(t))$$

Comme x , f et f' sont continues, x'' est continue. La solution x est donc bien de classe C^2 . $\square$

Question 2. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que l'erreur de consistance locale s'écrive en fonction de x'' .

Démonstration. Utilisons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la solution exacte x entre t et $t + h$:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t+\theta h) \quad \text{avec } \theta \in]0, 1[$$

L'erreur de consistance locale est définie par :

$$E(h) = x(t+h) - x(t) - h\Phi(x(t), h)$$

Pour Euler, $\Phi(x, h) = f(x) = x'(t)$. En substituant le développement de Taylor :

$$E(h) = \frac{h^2}{2} x''(t + \theta h)$$

□

Question 3. En déduire qu'il existe une constante C telle que l'erreur locale soit majorée par Ch .

Démonstration. Puisque x est C^2 sur le compact $[0, T]$ (fermé borné), sa dérivée seconde est bornée. Soit $M = \max_{t \in [0, T]} |x''(t)|$. D'après la question précédente :

$$|E(h)| = \left| \frac{h^2}{2} x''(t + \theta h) \right| \leq \frac{h^2}{2} M$$

□

Question 4. Montrer que l'erreur globale vérifie la récurrence $|e_{i+1}| \leq (1 + Lh)|e_i| + Ch^2$.

Démonstration. Soit $e_i = x_i - x(t_i)$.

— Schéma numérique : $x_{i+1} = x_i + hf(x_i)$

— Solution exacte (via Taylor) : $x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(x(t_i)) + \eta_i$ avec $|\eta_i| \leq Ch^2$.

Soustrayons les deux expressions :

$$e_{i+1} = x_{i+1} - x(t_{i+1}) = (x_i - x(t_i)) + h(f(x_i) - f(x(t_i))) - \eta_i$$

$$e_{i+1} = e_i + h(f(x_i) - f(x(t_i))) - \eta_i$$

Passons à la valeur absolue :

$$|e_{i+1}| \leq |e_i| + h|f(x_i) - f(x(t_i))| + |\eta_i|$$

Comme f est L -Lipschitzienne, $|f(x_i) - f(x(t_i))| \leq L|x_i - x(t_i)| = L|e_i|$. Donc :

$$|e_{i+1}| \leq |e_i| + hL|e_i| + Ch^2 = (1 + Lh)|e_i| + Ch^2$$

□

Question 5. Montrer que pour tout entier i , $|e_i| \leq e^{iLh}Ch^2$.

Démonstration. Nous avons une récurrence de la forme $u_{i+1} \leq (1 + Lh)u_i + K$ avec $u_0 = |e_0| = 0$ et $K = Ch^2$. Par itération (Lemme de Gronwall discret) :

$$|e_i| \leq K \sum_{k=0}^{i-1} (1 + Lh)^k$$

Utilisons l'inégalité $1 + x \leq e^x$ pour $x \geq 0$. Ici $1 + Lh \leq e^{Lh}$. Donc $(1 + Lh)^k \leq e^{kLh}$. La somme devient :

$$|e_i| \leq Ch^2 \sum_{k=0}^{i-1} e^{kLh}$$

On majore grossièrement la somme : chaque terme e^{kLh} est inférieur ou égal à e^{iLh} (car $k < i$). Il y a i termes.

$$\sum_{k=0}^{i-1} e^{kLh} \leq i \times e^{iLh}$$

D'où le résultat :

$$|e_i| \leq Ch^2 \cdot i \cdot e^{iLh}$$

□

Question 6. En déduire que $e(h) \leq e^{LT}CTh$ et conclure sur l'ordre de convergence.

Démonstration. On considère l'erreur sur l'intervalle $[0, T]$. On a $t_i = ih \leq T$, donc $i \leq T/h$ et $ih \leq T$. Reprenons l'inégalité précédente :

$$|e_i| \leq e^{iLh} \cdot C \cdot (ih) \cdot h$$

En majorant iLh par LT et ih par T :

$$|e_i| \leq e^{LT} \cdot C \cdot T \cdot h$$

L'erreur globale $e(h) = \max_i |e_i|$ vérifie donc :

$$e(h) \leq \underbrace{(CTe^{LT})}_{\text{Constante}} \cdot h$$

Cela prouve que $e(h) = O(h)$. La méthode d'Euler converge donc à l'**ordre 1**. □