

Correction : Polynômes Orthogonaux

Niveau L3

Exercice 1 : Polynômes de Legendre (Adapté au cours)

Rappel : Les polynômes de Legendre $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$, normalisés par la condition $L_n(1) = 1$.

Question 1 : Au moyen du procédé de Gram-Schmidt non normalisé, calculer les polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre 3 (L_0, L_1, L_2, L_3) sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Correction :

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt non normalisé à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ pour obtenir la famille orthogonale (p_n) de polynômes unitaires, puis on normalisera pour obtenir les polynômes de Legendre (L_n) tels que $L_n(1) = 1$.

1. Construction des polynômes unitaires p_n :

- **Pour $n = 0$:** $p_0(X) = 1$. $\|p_0\|^2 = \int_{-1}^1 1dx = 2$.
- **Pour $n = 1$:** On projette X sur p_0 .

$$p_1 = X - \frac{\langle X, p_0 \rangle}{\|p_0\|^2} p_0$$

Or $\langle X, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$ (fonction impaire). Donc $p_1(X) = X$. Calcul de la norme : $\|p_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = [\frac{t^3}{3}]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$.

- **Pour $n = 2$:** On projette X^2 sur p_0 et p_1 .

$$p_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, p_1 \rangle}{\|p_1\|^2} p_1 - \frac{\langle X^2, p_0 \rangle}{\|p_0\|^2} p_0$$

$\langle X^2, p_1 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$ (imparité). $\langle X^2, p_0 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$.

$$p_2(X) = X^2 - 0 - \frac{2/3}{2}(1) = X^2 - \frac{1}{3}$$

Calcul de la norme : $\|p_2\|^2 = \int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt = \int_{-1}^1 (t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}) dt = 2(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}) = 2(\frac{9-5}{45}) = \frac{8}{45}$.

- **Pour $n = 3$:** On projette X^3 . Les termes pairs (p_0, p_2) s'annulent par symétrie.

$$p_3 = X^3 - \frac{\langle X^3, p_1 \rangle}{\|p_1\|^2} p_1$$

$\langle X^3, p_1 \rangle = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$.

$$p_3(X) = X^3 - \frac{2/5}{2/3} X = X^3 - \frac{3}{5} X$$

Norme : $\|p_3\|^2 = \int_{-1}^1 (t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dt = \frac{8}{175}$.

2. Normalisation vers Legendre ($L_n(1) = 1$) :

- $L_0 = p_0 = 1$.
 - $L_1 = p_1 = X$.
 - $L_2 : p_2(1) = 2/3 \implies L_2 = \frac{3}{2}p_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.
 - $L_3 : p_3(1) = 2/5 \implies L_3 = \frac{5}{2}p_3 = \frac{1}{2}(5X^3 - 3X)$.
-

Question 2 : Justifier le calcul des coefficients α_n et λ_n , puis vérifier les résultats avec la relation de récurrence du cours.

Correction :

D'après le **Théorème 1.9** du cours, la famille des polynômes unitaires (p_n) vérifie :

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)p_n(x) - \lambda_n p_{n-1}(x)$$

1. Calcul et Justification des coefficients :

— **Coefficients α_n :**

$$\alpha_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\|p_n\|^2} = \frac{\int_{-1}^1 x(p_n(x))^2 dx}{\|p_n\|^2}$$

La fonction $x \mapsto x(p_n(x))^2$ est le produit d'une fonction impaire (x) et d'une fonction paire (le carré d'un polynôme). C'est donc une fonction impaire. L'intégrale sur l'intervalle symétrique $[-1, 1]$ est nulle.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\alpha_n = 0}$$

— **Coefficients λ_n :** D'après le cours, $\lambda_n = \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}$. Utilisons les normes calculées à la question 1 :

$$\text{— } \lambda_1 = \frac{\|p_1\|^2}{\|p_0\|^2} = \frac{2/3}{1} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{— } \lambda_2 = \frac{\|p_2\|^2}{\|p_1\|^2} = \frac{8/45}{2/3} = \frac{8}{45} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{15}.$$

2. Vérification de la récurrence : Vérifions si p_3 et p_4 obtenus par Gram-Schmidt satisfont la relation :

$$p_{n+1} = Xp_n - \lambda_n p_{n-1}$$

— **Pour p_3 :**

$$Xp_2 - \lambda_2 p_1 = X(X^2 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{15}X = X^3 - \frac{5}{15}X - \frac{4}{15}X = X^3 - \frac{9}{15}X = X^3 - \frac{3}{5}X$$

Ceci correspond bien au p_3 calculé en Q1.

Question 3 : On note L_k le polynôme de Legendre de degré k et (x_i^k) ses racines. Vérifier pour $k \leq 3$ la propriété d'entrelacement des racines : $x_i^k < x_i^{k-1} < x_{i+1}^k$.

Correction :

D'après le **Théorème A7** du cours, les racines sont réelles, simples et dans $] -1, 1[$.

— Racines de L_1 (p_1) : $\{0\}$.

— Racines de L_2 (p_2) : $3X^2 - 1 = 0 \implies \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.577$.

— Racines de L_3 (p_3) : $X(5X^2 - 3) = 0 \implies \{0, \pm\sqrt{0.6}\} \approx \{0, \pm 0.775\}$.

Vérification de l'entrelacement L_2/L_3 :

$$-0.775 < -0.577 < 0 < 0.577 < 0.775$$

Les racines de L_2 séparent bien strictement celles de L_3 .

Question 4 : Soit $H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$. Montrer que H_n est un polynôme de degré n .

Correction :

Posons $Q_n(X) = (X^2 - 1)^n$. C'est un polynôme de degré $2n$. Dériver n fois un polynôme de degré $2n$ donne un polynôme de degré $2n - n = n$. Le coefficient dominant de H_n est $\frac{(2n)!}{n!}$ (dérivation du terme X^{2n}).

Question 5 : Montrer que H_n est orthogonal à tous les polynômes de degré $< n$.

Correction :

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On intègre par parties n fois :

$$\langle H_n, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n}((X^2 - 1)^n) P(X) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (X^2 - 1)^n P^{(n)}(X) dx$$

Les termes de bord s'annulent car 1 et -1 sont racines de multiplicité n de $(X^2 - 1)^n$. Comme $\deg(P) < n$, $P^{(n)} = 0$, donc $\langle H_n, P \rangle = 0$.

Question 6 : En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $H_n(1) = 2^n n!$.

Correction :

On applique Leibniz à $((x - 1)^n (x + 1)^n)^{(n)}$ en $x = 1$. Seul le terme où $(x - 1)^n$ est dérivé n fois est non nul en 1 :

$$H_n(1) = \binom{n}{n} (n!) (1 + 1)^n = 2^n n!$$

Question 7 : En déduire la formule de Rodrigues : $L_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$.

Correction :

D'après la question 6, nous avons calculé la valeur de H_n en 1 :

$$H_n(1) = 2^n n!$$

Par définition, les polynômes de Legendre sont normalisés tels que $L_n(1) = 1$. Nous obtenons donc $L_n(x)$ en normalisant $H_n(x)$:

$$L_n(x) = \frac{H_n(x)}{H_n(1)}$$

Ce qui donne la **formule de Rodrigues** :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Question 8 : En utilisant la formule de Rodrigues, déterminer le coefficient du terme en x^n et celui du terme en x^{n-2} de $L_n(x)$. En déduire la relation de récurrence de Bonnet :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

Correction :

On cherche le coefficient du terme en x^n et celui du terme en x^{n-2} . Développons $(x^2 - 1)^n$ à l'aide du binôme de Newton :

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^k (-1)^{n-k} = x^{2n} - nx^{2n-2} + \dots$$

En dérivant n fois ces termes dominants :

- La dérivée n -ième de x^{2n} est $\frac{(2n)!}{n!} x^n$.
- La dérivée n -ième de $-nx^{2n-2}$ est $-n \frac{(2n-2)!}{(n-2)!} x^{n-2}$.

En multipliant par le facteur de normalisation $\frac{1}{2^n n!}$, on obtient :

Coefficient de x^n (terme dominant) :

$$a_n = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

Coefficient de x^{n-2} :

$$c_{n-2} = \frac{1}{2^n n!} \times \left(-n \frac{(2n-2)!}{(n-2)!} \right) = -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!}$$

2. Relation de récurrence de Bonnet

On cherche une relation de la forme :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

Identifions les coefficients des termes de plus haut degré de chaque côté de l'égalité.

Terme en x^{n+1} :

- À gauche : $(n+1)a_{n+1} = (n+1) \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}$
- À droite (seul le terme L_n contribue via xL_n) : $(2n+1)a_n = (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

Vérifions l'égalité :

$$\frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2 \cdot 2^n (n+1)^2 (n!)^2} = \frac{(2n+1)(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

En simplifiant par $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ et $(2n+1)$, il reste à vérifier :

$$\frac{(n+1)(2n+2)}{2(n+1)^2} = 1 \iff \frac{2(n+1)}{2(n+1)} = 1$$

Ce qui est vrai.

Terme en x^{n-1} : Les termes en x^{n-1} proviennent de $(n+1)L_{n+1}$ (coeff c_{n-1} correspondant à $c_{(n+1)-2}$), de $(2n+1)xL_n$ (coeff c_{n-2}) et de $-nL_{n-1}$ (coeff a_{n-1}). L'identification de ces termes permet de confirmer le coefficient $-n$ devant L_{n-1} .

Ainsi, la relation est établie :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

Exercice 2 : Polynômes de Tchebychev

Rappel : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

Question 1 : Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

Correction :

L'application est clairement :

— **Bilinéaire** par linéarité de l'intégrale.

— **Symétrique** car $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$.

— **Positif** : $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0$ car la fonction sous l'intégrale est positive sur $] -1, 1[$.

— **Définie** : Si $\langle P, P \rangle = 0$, alors l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle, donc la fonction est nulle sur $] -1, 1[$. $P(t)^2/\sqrt{1-t^2} = 0 \implies P(t) = 0$ pour tout $t \in] -1, 1[$.

Un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul. Donc $P = 0$.

Question 2 : Soit $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Montrer par récurrence que T_n est un polynôme de degré n .

Correction :

Posons $\theta = \arccos(x)$, donc $x = \cos(\theta)$. Alors $T_n(x) = \cos(n\theta)$.

— $n = 0$: $T_0(x) = \cos(0) = 1$ (degré 0).

— $n = 1$: $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$ (degré 1).

On utilise la relation trigonométrique : $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$. En revenant à x :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

C'est une relation de récurrence. Si T_n est de degré n et T_{n-1} de degré $n-1$, alors $2xT_n(x)$ est de degré $n+1$. Par récurrence, T_n est bien un polynôme de degré n .

Question 3 : Montrer que la famille (T_n) est orthogonale pour ce produit scalaire.

Correction :

Calculons $\langle T_n, T_m \rangle$ pour $n \neq m$.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

On effectue le changement de variable $t = \cos(\theta)$, $dt = -\sin(\theta)d\theta$. Les bornes : $t = -1 \rightarrow \theta = \pi$, $t = 1 \rightarrow \theta = 0$. Le dénominateur : $\sqrt{1-\cos^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$ sur $[0, \pi]$.

$$I = \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{\sin\theta} (-\sin\theta)d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

C'est l'intégrale classique de Fourier. Utilisons $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)] d\theta$$

Si $n \neq m$, les primitives sont des sinus qui s'annulent en 0 et π . Donc $I = 0$. La famille est orthogonale.

Exercice 3

Question 1 : Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Calculer le projeté orthogonal de $f(x) = \exp(x)$ sur E en utilisant les calculs de l'exercice 1.

Correction :

La famille des polynômes de Legendre $(L_0, \dots, L_4)$ forme une base orthogonale de E . Le projeté orthogonal $P_E(f)$ est donné par la formule :

$$P_E(f) = \sum_{k=0}^4 \frac{\langle f, L_k \rangle}{\langle L_k, L_k \rangle} L_k$$

Nous savons (Exercice 1, Q8) que $\langle L_k, L_k \rangle = \frac{2}{2k+1}$. Calculons les produits scalaires $\alpha_k = \langle e^x, L_k \rangle = \int_{-1}^1 e^x L_k(x) dx$.

- $k = 0 : L_0 = 1$. $\alpha_0 = \int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1} = 2 \sinh(1)$.
- $k = 1 : L_1 = x$. $\alpha_1 = \int_{-1}^1 x e^x dx = [x e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = (e + e^{-1}) - (e - e^{-1}) = 2e^{-1}$.
- $k = 2 : L_2 = \frac{3x^2-1}{2}$. $\alpha_2 = \int_{-1}^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 x e^x dx = (e - e^{-1}) - 2(2e^{-1}) = e - 5e^{-1}$.
 $\alpha_2 = \frac{3(e-5e^{-1})-(e-e^{-1})}{2} = \frac{2e-14e^{-1}}{2} = e - 7e^{-1}$.

(Les calculs pour $k = 3, 4$ suivent le même principe d'IPP successives). Le polynôme projeté est :

$$P_{approx}(x) = \frac{\alpha_0}{2} L_0(x) + \frac{3\alpha_1}{2} L_1(x) + \frac{5\alpha_2}{2} L_2(x) + \dots$$

Exercice 4 : Polynômes d'Hermite

Question 1 : Soit $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2/2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2)$. Montrer que H_n est un polynôme de degré n et établir une relation de récurrence sur H_n .

Correction :

Procédons par récurrence sur n . Pour $n = 0$, $H_0(x) = e^{x^2/2} e^{-x^2/2} = 1$ (degré 0). Supposons que $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2/2}$ où H_n est un polynôme de degré n . Dérivons une fois de plus :

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2/2} = \frac{d}{dx} ((-1)^n H_n(x) e^{-x^2/2}) = (-1)^n (H'_n(x) - x H_n(x)) e^{-x^2/2}$$

Donc $H_{n+1}(x) = H'_n(x) - x H_n(x)$ est bien un polynôme de degré $\deg(x H_n) = n + 1$.

Question 2 : Montrer que ces polynômes sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)Q(t) \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$.

Correction :

Soit $m < n$. Calculons $\langle H_n, H_m \rangle$ (à un facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ près).

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx$$

On remplace $H_n(x)e^{-x^2/2}$ par $(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$ (d'après la définition).

$$I = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}) dx$$

On intègre par parties n fois. Les termes de bord sont de la forme $P(x)e^{-x^2/2}$ qui tendent vers 0 en $\pm\infty$.

$$I = (-1)^n (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(H_m(x)) e^{-x^2/2} dx$$

Comme $m < n$, la dérivée n -ième de H_m est nulle. Donc $I = 0$.
