

Correction du TD/TP N°2 - Exercice 1

Interpolation de Lagrange

Exercice 1 : Interpolation de Lagrange

Soit $n = 2$. On considère la subdivision régulière de $[x_{min}, x_{max}]$ définie par les points $x_i = x_{min} + i \frac{x_{max} - x_{min}}{n}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

1. Calcul des polynômes de Lagrange et d'interpolation

Pour $n = 2$, nous avons 3 points d'interpolation (x_0, x_1, x_2) . Les polynômes de Lagrange $(L_i)_{0 \leq i \leq 2}$ sont donnés par la formule générale :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Nous devons distinguer deux cas selon l'intervalle de définition des fonctions.

Cas A : Pour f_1 sur l'intervalle $[0, 2]$

Ici $x_{min} = 0$ et $x_{max} = 2$. Le pas est $h = \frac{2-0}{2} = 1$. Les points d'interpolation sont :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

Calcul des polynômes de base L_i :

— Pour $i = 0$:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

— Pour $i = 1$:

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x(x-2)}{-1} = -x(x-2)$$

— Pour $i = 2$:

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

Calcul du polynôme d'interpolation P_1 pour $f_1(x) = 2^x - 1$: On calcule les ordonnées $y_i = f_1(x_i)$:

- $y_0 = f_1(0) = 2^0 - 1 = 0$
- $y_1 = f_1(1) = 2^1 - 1 = 1$
- $y_2 = f_1(2) = 2^2 - 1 = 3$

Le polynôme d'interpolation est donné par $P_1(x) = \sum_{i=0}^2 y_i L_i(x)$:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 0 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 3 \cdot L_2(x) \\ &= -x(x-2) + \frac{3}{2}x(x-1) \\ &= -x^2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Cas B : Pour f_2 et f_3 sur l'intervalle $[-1, 1]$

Ici $x_{min} = -1$ et $x_{max} = 1$. Le pas est $h = \frac{1-(-1)}{2} = 1$. Les points d'interpolation sont :

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

Calcul des polynômes de base L_i (base canonique sur $[-1, 1]$) :

— Pour $i = 0$:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

— Pour $i = 1$:

$$L_1(x) = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = -(x^2-1) = 1-x^2$$

— Pour $i = 2$:

$$L_2(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{(x+1)x}{2} = \frac{1}{2}x(x+1)$$

Calcul du polynôme d'interpolation P_2 pour $f_2(x) = |x|$: On calcule les ordonnées $y_i = f_2(x_i)$:

$$\text{— } y_0 = |-1| = 1$$

$$\text{— } y_1 = |0| = 0$$

$$\text{— } y_2 = |1| = 1$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 \cdot L_0(x) + 0 \cdot L_1(x) + 1 \cdot L_2(x) \\ &= \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x+1) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - x + x^2 + x) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Calcul du polynôme d'interpolation P_3 pour $f_3(x)$: La fonction est définie par $f_3(x) = -1$ si $x < 0$ et $+1$ si $x \geq 0$.

$$\text{— } y_0 = f_3(-1) = -1$$

$$\text{— } y_1 = f_3(0) = 1$$

$$\text{— } y_2 = f_3(1) = 1$$

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= -1 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 1 \cdot L_2(x) \\
&= -\frac{1}{2}x(x-1) + (1-x^2) + \frac{1}{2}x(x+1) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
&= \left(-\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x + 1 \\
&= -x^2 + x + 1
\end{aligned}$$

2. Erreur d'interpolation

Théorème de l'erreur d'interpolation : Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ (c'est-à-dire si f est $n+1$ fois continûment dérivable), alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in [\min(x_i), \max(x_i)]$ tel que :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Majoration de l'erreur : Si l'on note $M_{n+1} = \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$, on a la majoration suivante :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

Application aux fonctions de l'exercice (avec $n = 2$, donc $n+1 = 3$) :

1. **Pour** $f_1(x) = 2^x - 1$ **sur** $[0, 2]$: La fonction $x \mapsto 2^x = e^{x \ln 2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème s'applique. Les dérivées successives sont $f_1^{(k)}(x) = (\ln 2)^k 2^x$. La dérivée troisième est $f_1^{(3)}(x) = (\ln 2)^3 2^x$. Cette fonction étant croissante sur $[0, 2]$, le maximum est atteint en $x = 2$:

$$M_3 = (\ln 2)^3 2^2 = 4(\ln 2)^3$$

D'où la majoration :

$$\forall x \in [0, 2], \quad |f_1(x) - P_1(x)| \leq \frac{4(\ln 2)^3}{6} |x(x-1)(x-2)|$$

2. **Pour** $f_2(x) = |x|$ **sur** $[-1, 1]$: La fonction valeur absolue est continue, mais n'est pas dérivable en 0. Elle n'appartient pas à $\mathcal{C}^1$, et a fortiori pas à $\mathcal{C}^3$. **Le théorème ne s'applique pas directement** car la condition de régularité n'est pas satisfaite. On ne peut pas majorer l'erreur en utilisant la dérivée troisième.
3. **Pour** $f_3(x)$ **sur** $[-1, 1]$: Cette fonction présente une discontinuité en $x = 0$ (saut de -1 à 1). Elle n'est même pas continue ($\mathcal{C}^0$). **Le théorème ne s'applique pas.** L'approximation polynomiale sera d'ailleurs très mauvaise près de la discontinuité (phénomène de Gibbs si n augmente).