

Examen d'Analyse Numérique - Sujet B

Durée : 1h30

Consignes : Pour chaque question, entourez la (ou les) bonne(s) réponse(s). **Si un encadré "Justification" est présent**, rédigez obligatoirement une justification rigoureuse (calcul, étape de preuve) dans cet encadré. Une réponse correcte sans justification ne rapportera pas la totalité des points.

Partie 1 : Intégration Numérique

Question 1. Quel est le degré d'exactitude maximal de la méthode des trapèzes ?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3

Question 2. On approche l'intégrale $I(f) = \int_0^1 x^3 dx$ par la méthode des trapèzes (sur un seul intervalle, $n = 1$). Calculez la valeur approchée $J(f)$ puis déduisez-en la valeur absolue de l'erreur exacte $|E(f)| = |J(f) - I(f)|$.

- A) 1/4
- B) 1/6
- C) 1/12
- D) 1/2

Justification :

Question 3. Dans la preuve du Théorème 1.10 sur les zéros des polynômes orthogonaux, on suppose par l'absurde que p_n ne possède que $k < n$ racines de multiplicité impaire dans $]a, b[$, notées x_1, \dots, x_k . On pose alors $Q(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i)$. Quelle contradiction majeure apparaît en calculant l'intégrale $I = \int_a^b p_n(x)Q(x)dx$?

- A) $I = 0$ par construction de Q , mais p_n n'est pas la fonction nulle.
- B) $I \neq 0$ car la fonction garde un signe constant, mais $I = 0$ par orthogonalité puisque $\deg(Q) < n$.
- C) $I < 0$ ce qui contredit la positivité du produit scalaire.
- D) $I \rightarrow \infty$, ce qui est impossible sur un segment fermé.

Justification :

Question 4. On cherche à construire une méthode de quadrature à 2 points sur $[0, 1]$ de la forme $J(f) = \lambda_0 f(1/3) + \lambda_1 f(2/3)$. Déterminez rigoureusement les poids λ_0 et λ_1 pour que la méthode intègre exactement les polynômes de degré ≤ 1 .

- A) $\lambda_0 = 1/3, \lambda_1 = 2/3$
- B) $\lambda_0 = 1/2, \lambda_1 = 1/2$
- C) $\lambda_0 = 1/4, \lambda_1 = 3/4$
- D) $\lambda_0 = 3/4, \lambda_1 = 1/4$

Justification :

Question 5. Selon le cours, dans la formule de Taylor avec reste intégral (Théorème 1.3), quelle est l'expression correcte du reste pour une fonction f de classe \mathcal{C}^{n+1} ?

- A) $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$
- B) $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$
- C) $\int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n)}(t) dt$
- D) $\sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$

Question 6. Soit $E(h)$ la majoration de l'erreur globale de la méthode du point milieu composite sur $[a, b]$ avec un pas h . Si l'on divise le pas par 2 (on passe de h à $h/2$), par quel facteur l'erreur globale théorique majorante est-elle divisée ?

- A) L'erreur est divisée par 2.
- B) L'erreur est divisée par 4.
- C) L'erreur est divisée par 8.
- D) L'erreur est inchangée.

Justification :

Partie 2 : Résolution Numérique d'EDO

Question 7. Laquelle de ces formulations définit rigoureusement une méthode implicite ?

- A) L'inconnue u_{n+1} se calcule directement à partir de u_n .
- B) L'inconnue u_{n+1} est solution d'une équation faisant intervenir $f(t_{n+1}, u_{n+1})$.
- C) La méthode utilise un prédicteur intermédiaire avant de calculer la valeur finale.
- D) La méthode s'écrit sous la forme d'un tableau de Butcher tridiagonal.

Question 8. Calculez à la main une itération de la méthode d'Euler implicite (Euler régressif) pour l'EDO scalaire $y' = -2y + 1$ avec $y(0) = 1$ et un pas de temps $h = 0.5$. Que vaut y_1 au temps $t_1 = 0.5$?

- A) $y_1 = 0$
- B) $y_1 = 0.5$
- C) $y_1 = 0.75$
- D) $y_1 = 1.25$

Justification :

Question 9. On rappelle le tableau de Butcher de la méthode de RK2 (version point milieu) :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

On applique cette méthode sur l'EDO $y' = t \cdot y$ avec $y(0) = 1$ et un pas $h = 1$. En utilisant ce tableau, calculez la pente p_2 et la valeur finale y_1 .

- A) $y_1 = 1$
- B) $y_1 = 1.25$
- C) $y_1 = 1.5$
- D) $y_1 = 2$

Justification :

Question 10. Lequel de ces tableaux de Butcher correspond à la méthode classique de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) ?

$$\text{A) } \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$\text{B) } \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

$$\text{C) } \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

$$\text{D) } \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Question 11. Quelle est la définition exacte de l'erreur de convergence globale E_n étudiée pour montrer la convergence d'un schéma numérique ?

- A) $E_n = u(t_{n+1}) - u(t_n) - h\phi(t_n, u_n, h)$
- B) $E_n = u_{n+1} - u_n$
- C) $E_n = u(t_n) - u_n$
- D) $E_n = f(t_n, u(t_n)) - f(t_n, u_n)$

Question 12. On étudie l'EDO $y' = \lambda y$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$) pour la méthode d'Euler explicite. L'erreur de consistance locale est $e_0 = y(t_1) - y_0 - hf(t_0, y_0)$. Sachant que la solution exacte est $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$, effectuez un développement limité pour trouver le premier terme non nul de e_0 . De quel ordre de grandeur (en h) est cette erreur de consistance locale ?

- A) $\mathcal{O}(h)$
- B) $\mathcal{O}(h^2)$
- C) $\mathcal{O}(h^3)$
- D) 0

Justification :

Question 13. La démonstration du Théorème 2.2 (Stabilité + Consistance \Rightarrow Convergence) part de l'inégalité de stabilité en choisissant des suites très précises. Si u_n est la suite numérique, quelle suite mathématique est choisie pour jouer le rôle de v_n dans la définition de la stabilité ?

- A) $v_n = u(t_n)$, la solution exacte évaluée aux points du maillage.
- B) $v_n = u_{n-1}$, le terme précédent.

C) $v_n = \phi(t_n, u_n, h)$, l'incrément.

D) $v_n = 0$, la suite nulle.

Justification :

Partie 3 : Calcul des Valeurs Propres

Question 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Quel est le centre et le rayon du premier disque de Gershgorin

D_1 ?

A) Centre 2, rayon -1

B) Centre 2, rayon 1

C) Centre 2, rayon 0

D) Centre 1, rayon 2

Question 15. D'après le Lemme 3.1, comment calcule-t-on la norme subordonnée euclidienne $\|D\|_2$ d'une matrice diagonale D ? (Démontrez-le dans le cas où $D = \text{diag}(3, -4, 2)$).

A) C'est la somme des modules, ici 9.

B) C'est le maximum des éléments, ici 3.

C) C'est le maximum des valeurs absolues, ici 4.

D) C'est la trace, ici 1.

Justification :

Question 16. On applique la méthode de la puissance sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec le vecteur initial $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculez $y_0 = x_0/\|x_0\|_2$, $x_1 = Ay_0$, $y_1 = x_1/\|x_1\|_2$, puis le quotient de Rayleigh $\mu_1 = y_1^T Ay_1$. Que vaut μ_1 ?

A) 1.0

B) 2.6

C) 3.0

D) 5.0

Justification :

Question 17. On utilise la déflation de Wielandt sur la matrice **non symétrique** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La valeur propre dominante est $\lambda_1 = 3$ et son vecteur propre unitaire associé est $v_1 = (1, 0)^T$. On choisit arbitrairement le vecteur $u = (1, 1)^T$. Vérifiez que $u^T v_1 = 1$, puis calculez la matrice déflatée $A_1 = A - \lambda_1 v_1 u^T$. Quel est le spectre de A_1 ?

- A) $\{3, 2\}$
- B) $\{0, 2\}$
- C) $\{0, -1\}$
- D) $\{0, 0\}$

Justification :

Question 18. Dans l'algorithme QR, que représente précisément la matrice cumulée Q_k (définie dans le Lemme 3.2) ?

- A) La matrice de passage vers la forme tridiagonale.
- B) Le produit des matrices orthogonales $Q_0 Q_1 \dots Q_{k-1}$.
- C) L'inverse de la matrice A_k .
- D) Le quotient de Rayleigh au rang k .

Question 19. Soit une matrice H de taille 4×4 . D'après la définition, combien de coefficients au maximum peuvent être strictement non nuls **strictement sous la diagonale principale** si H est de Hessenberg supérieure ? (Faites un schéma de la matrice sur votre brouillon).

- A) 0
- B) 3
- C) 6
- D) 16

Justification :

Question 20. On cherche la décomposition QR de la matrice inversible $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En appliquant mentalement le procédé de Gram-Schmidt sur les colonnes de A , déterminez la matrice orthogonale Q et la matrice triangulaire supérieure R .

A) $Q = I_2, R = A$

B) $Q = A, R = I_2$

C) $Q = -I_2, R = -A$

D) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Justification :